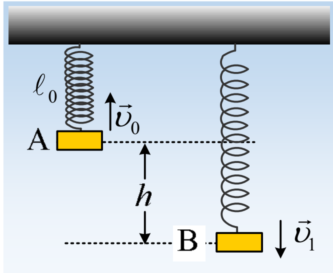
Μια ΑΑΤ και μια φθίνουσα ταλάντωση



Στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=50N/m, το πάνω άκρο του οποίου έχει δεθεί στο ταβάνι, δένουμε ένα σώμα μάζας 2kg, συγκρατώντας το σε μια θέση Α, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Σε μια στιγμή εκτοξεύουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα υ_0=4m/s, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, οπότε εκτελεί μια ΑΑΤ.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος.

ii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, το σώμα περνά από την θέση Β, η οποία απέχει κατακόρυφη απόσταση (ΑΒ)=h=0,8m, κινούμενο προς τα κάτω. Για τη στιγμή αυτή, να βρεθούν:

α) Η ταχύτητα του σώματος.

β) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.

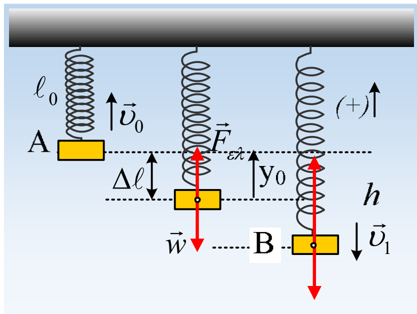
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, αλλά τώρα ασκείται στο σώμα και δύναμη απόσβεσης της μορφής F=-0,4υ (S.I.). Κάποια στιγμή t_2, το σώμα περνά από την θέση Β, κινούμενο προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου υ_2=3m/s. Για την στιγμή αυτή να βρεθούν:

α) Η επιτάχυνση του σώματος.

β) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο μεσαίο από τα διπλανά σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, στην θέση ισορροπίας Ο, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$. Από την συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \to k\cdot\Delta\ell = mg \to$$

$$\Delta\ell=\frac{mg}{k}=\frac{2\cdot 10}{50}m=0,4m$$

Αλλά τότε τη στιγμή που ξεκινά το σώμα την ταλάντωσή, έχει απομάκρυνση (με θετική φορά προς τα πάνω) $y_0=\Delta\ell$=0,4 m και ενέργεια:

$$E=K_1+U_1=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+\frac{1}{2}ky_0^2=\frac{1}{2}2\cdot 4^2\,J+\frac{1}{2}50\cdot 0,4^2\,J=16J+4J=20J$$

ii) Η θέση Β, βρίσκεται 0,8m, πιο χαμηλά από την θέση Α, άρα απέχει κατά 0,8m-y_1=0,4m από την θέση ισορροπίας, η με άλλα λόγια βρίσκεται σε απομάκρυνση y_2=-0,4m από την θέση ισορροπίας.

α) Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή μεταξύ των θέσεων Α και Β, οπότε:

$$K_0+U_0=K_1+U_1 \to$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+\frac{1}{2}ky_0^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}ky_1^2 \xrightarrow{y_0=|y_1|}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \to |\upsilon_1|=|\upsilon_0| \to \upsilon_1=-4m/s$$

β) Το σώμα ταλαντώνεται με την επίδραση της δύναμης επαναφοράς (η συνισταμένη της δύναμης του ελατηρίου και του βάρους) $\Sigma F=-D\cdot y$, όπου στη θέση Β έχει τιμή $\Sigma F=-ky_1=-50\cdot(-0,4)N=+20N$, έχει δηλαδή φορά προς τα πάνω (προς την θέση ισορροπίας…). Αλλά τότε για τους ζητούμενους ρυθμούς θα έχουμε:

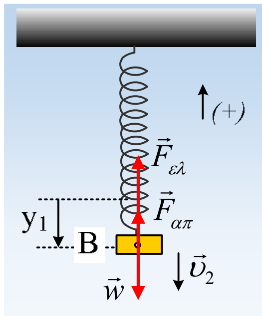
$$\frac{dK_1}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=|\Sigma F|\cdot|\upsilon_1|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^0=-|\Sigma F|\cdot|\upsilon_1|=-20\cdot 4J/s=-80J/s$$

$$\frac{dU_1}{dt}=-\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=-|\Sigma F|\cdot|\upsilon_1|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^0=+|\Sigma F|\cdot|\upsilon_1|=+20\cdot 4J/s=+80J/s$$

iii) Τώρα το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση λόγω της δύναμης απόσβεσης που δέχεται, οπότε στην θέση Β, θα έχουμε τις δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα. Η δύναμη επαναφοράς είναι η ίδια με πριν με μέτρο 20N και φορά προς τα πάνω, ενώ η δύναμη απόσβεσης με τιμή:

$$F_{\alpha\pi 1}=-0,4\upsilon=-0,4\cdot 3N=-1,2N$$

Έχει επίσης φορά προς τα πάνω.



α) Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής παίρνουμε για την επιτάχυνση του σώματος στη θέση Β:

$$\Sigma F_2=ma_2 \to a_2=\frac{F_{\varepsilon\pi}+F_{\alpha\pi}}{m}=\frac{20+1,2}{2}m/s^2=10,6m/s^2.$$

Με κατεύθυνση προς τα πάνω.

β) Ενώ οι αντίστοιχοι ρυθμοί θα είναι ίσοι:

$$\frac{dK_2}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=|\Sigma F|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^0=-|\Sigma F|\cdot|\upsilon_2|=-21,2\cdot 3J/s=-63,6J/s$$

$$\frac{dU_2}{dt}=-\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=-|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^0=+|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|\upsilon_2|=+20\cdot 3J/s=+60J/s$$

Σχόλιο:

Αξίζει να προσέξουμε ότι όταν το σώμα εκτελεί ΑΑΤ (αμείωτη ταλάντωση) οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετοι, αφού η μόνη δύναμη, είναι η δύναμη επαναφοράς, με αποτέλεσμα το έργο της να μετράει την ενέργεια που μετατρέπεται από δυναμική σε κινητική και αντίστροφα. Παραπάνω οι δυο ρυθμοί βρέθηκαν ίσοι με $\frac{dK_1}{dt}=-80J/s$ και $\frac{dU_1}{dt}=+80J/s$.

Αντίθετα στην φθίνουσα ταλάντωση, ασκείται και η δύναμη απόσβεσης, μέσω του έργου της οποίας η μηχανική ενέργεια υποβαθμίζεται σε θερμική. Έτσι παραπάνω, ενώ η κινητική ενέργεια μειώνεται με ρυθμό 63.6J/s, ενώ η δυναμική ενέργεια αυξάνεται με ρυθμό 60J/s, αφού τα υπόλοιπα 3,6J/s αφαιρούνται από το σώμα, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης.

dmargaris@gmail.com