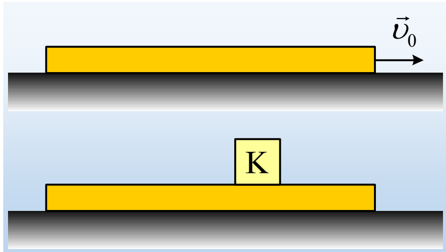
Ένα σύστημα και η ορμή των σωμάτων



Μια σανίδα μάζας Μ=12kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με σταθερή ταχύτητα υ_0=4m/s. Σε μια στιγμή αφήνεται πάνω της (χωρίς ταχύτητα) ένα κουτί Κ, σχήματος κύβου, το οποίο βλέπουμε να παρασύρεται από την σανίδα.

i) Να σχεδιάσετε σε διαφορετικά σχήματα τις δυνάμεις που ασκούνται στο κουτί (Κ) και στην σανίδα (Σ) και να τις χαρακτηρίσετε ως εσωτερικές ή εξωτερικές για το σύστημα των δύο σωμάτων. Είναι το σύστημα αυτό μονωμένο;

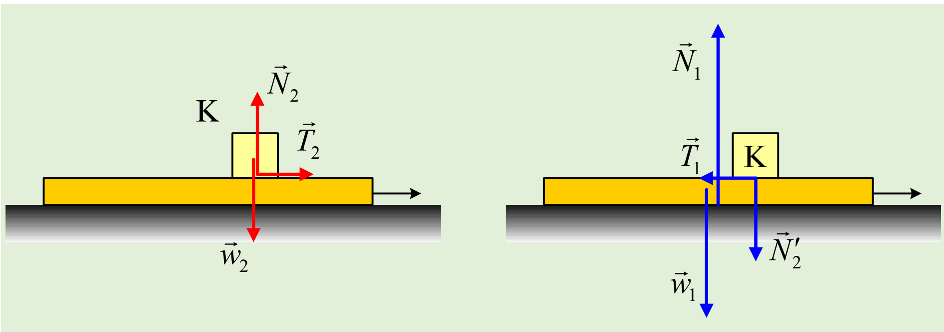
ii) Σε μια στιγμή t_1, η σανίδα έχει ταχύτητα υ_1=3,5m/s. Να υπολογισθεί η ορμή του κουτιού, την στιγμή αυτή.

iii) Αν η μάζα του κουτιού είναι ίση με m=4kg, να βρεθεί η ταχύτητά του, όταν πάψει η ολίσθησή του πάνω στην σανίδα, τη στιγμή t_2.

iv) Αν την στιγμή t_1 η ορμή του κουτιού μεταβάλλεται με ρυθμό dp_2/dt=4kgm/s^2, να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σανίδας, την ίδια στιγμή. Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής της σανίδας την στιγμή t_3= t_2+1s.

Απάντηση:

i) Μόλις αφήσουμε το κουτί πάνω στην κινούμενη σανίδα, αυτή δέχεται δύναμη τριβής, αντίθετης φοράς από την ταχύτητά της. Η αντίδρασή της θα ασκηθεί στο κουτί, με φορά προς τα δεξιά, όπου αυτή είναι υπεύθυνη για την κίνηση του κουτιού. (Αν δεν υπήρχαν τριβές, το κουτί θα παρέμενε ακίνητο και η σανίδα θα συνέχιζε την κίνησή της με την ίδια ταχύτητα). Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο κουτί και στο δεύτερο στην σανίδα.



Για το κουτί, το βάρος $\vec{w}_2$ είναι εξωτερική δύναμη για το σύστημα κουτί-σανίδα, ενώ η κάθετη αντίδραση $\vec{N}_2$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_2$, δυνάμεις από την σανίδα, είναι εσωτερικές.

Για την σανίδα, το βάρος $\vec{w}_1$ και η κάθετη αντίδραση $\vec{N}_1$ από το επίπεδο είναι δυνάμεις εξωτερικές, ενώ η αντίδραση της $\vec{N}_2$ η δύναμη $\vec{N}_2'$ καθώς και η αντίδραση της τριβής, η $\vec{T}_1$, είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα.

Από την ισορροπίας των δύο σωμάτων στην κατακόρυφη διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\vec{F}_{1y}=0 \rightarrow N_1=w_1+N_2' \quad (1) \\ \Sigma\vec{F}_{2y}=0 \rightarrow N_2=w_2 \qquad (2) \end{array}\right\} \quad N_1=w_1+N_2'=w_1+w_2 \rightarrow$$

$$\boxed{\Sigma F_{\varepsilon\xi}=N_1-w_1-w_2=0}$$

Το σύστημα δηλαδή των σωμάτων κουτί-σανίδα είναι μονωμένο.

ii) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων μεταξύ των χρονικών στιγμών t=0 και t_1, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική:

$$\vec{p}_0=\vec{p}_1 \rightarrow M\upsilon_0=M\upsilon_1+p_{\kappa,1} \rightarrow$$
$$p_{\kappa,1}=M\left(\upsilon_0-\upsilon_1\right)=12\cdot\left(4-3,5\right)kgm/s=6kgm/s$$

iii) Μόλις πάψει το κουτί να ολισθαίνει πάνω στην σανίδα, θα κινούνται μαζί, με την ίδια ταχύτητα, έστω υ_κ. Εφαρμόζοντας ξανά την ΑΔΟ, μεταξύ των στιγμών t=0 και t_2, θα έχουμε:

$$\vec{p}_0=\vec{p}_2 \rightarrow M\upsilon_0=\left(M+m\right)\upsilon_\kappa \rightarrow$$
$$\upsilon_\kappa=\frac{M\upsilon_0}{M+m}=\frac{12\cdot 4}{12+4}m/s=3m/s$$

iv) Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του κουτιού (Κ) έχουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}_\kappa}{\Delta t}=\frac{d\vec{p}_\kappa}{dt}=\Sigma\vec{F}=\vec{T}_2$$

Όπου $\frac{\Delta\vec{p}_\kappa}{\Delta t}$ ο μέσος ρυθμός και $\frac{d\vec{p}_\kappa}{dt}$ ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής του, όπου στην περίπτωσή μας είναι ίσοι, αφού η τριβή ολίσθησης παραμένει σταθερή, σε όλη τη διάρκεια της επιτάχυνσής του.

Αλλά η αντίδραση της τριβής $\vec{T}_2$ είναι η τριβή $\vec{T}_1$ η οποία ασκείται στην σανίδα και μεταβάλλει την ορμή της, οπότε:

$$\frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t}=\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt}=\Sigma\vec{F}=\vec{T}_1 \rightarrow \frac{dp_\Sigma}{dt}=-T_2=-4kgm/s^2.$$

Εναλλακτικά, αφού εξηγήσαμε προηγούμενα ότι το σύστημα είναι μονωμένο, κάθε στιγμή θα ισχύει:

$$\vec{p}_\kappa+\vec{p}_\Sigma=\sigma\tau\alpha\theta \rightarrow$$
$$\frac{d\vec{p}_\kappa}{dt}+\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt}=0 \rightarrow$$
$$\frac{dp_\Sigma}{dt}=-\frac{dp_\kappa}{dt}=-4kgm/s^2.$$

Μετά την στιγμή t_2, όπου τα σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ τους, οπότε δεν αναπτύσσεται και δύναμη τριβής, συνεπώς η ορμή της σανίδας παραμένει σταθερή και θα έχουμε, για κάθε στιγμή, άρα και για τη στιγμή t_3:

$$\frac{dp_{\Sigma}}{dt} = 0$$

dmargaris@gmail.com