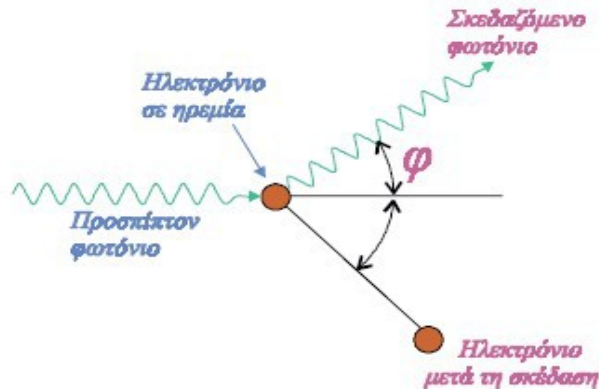


Σκέδαση φωτονίου σε γωνία 60° και διπλασιασμός του μήκους κύματος

Φωτόνιο με μήκος κύματος λ σκεδάζεται από αρχικά ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Η γωνία σκέδασης του φωτονίου είναι $\phi=60^\circ$ και το μήκος κύματος λ' του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι διπλάσιο από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου ($\lambda'=2\lambda$).



A. Η γωνία θ που σχηματίζει η διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου με την διεύθυνση του προσπίπτοντος φωτονίου είναι:

- i) $\theta=30^\circ$ ii) $\theta=60^\circ$ iii) $\theta=90^\circ$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

B. Αν το μέτρο της ορμής του προσπίπτοντος φωτονίου είναι p , τότε το μέτρο της ορμής p_e του ηλεκτρονίου θα είναι:

- i) $p_e = p \frac{\sqrt{3}}{4}$ ii) $p_e = p \frac{\sqrt{3}}{3}$ iii) $p_e = p \frac{\sqrt{3}}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Γ. Αν το μέτρο της ορμής του ηλεκτρονίου είναι $p_e = p \frac{\sqrt{3}}{2}$ και η μάζα ηρεμίας του είναι m_0 , ποιά από τις παρακάτω σχέσεις θα χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό του μέτρου της ταχύτητας u του ηλεκτρονίου:

α) την κλασσική $p_e = m_0 u$ ή

β) τη ρελατιβιστική $p_e = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Α. Από τη σχέση Compton για τη μετατόπιση του μήκους κύματος έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \xrightarrow[\varphi=60^\circ]{\lambda'=2\lambda} \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \sigma\upsilon\nu 60^\circ) \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{2m_0 c}} \quad (1)$$

Από το λόγο των ενεργειών E' και E του σκεδαζόμενου και του προσπίπτοντος φωτονίου έχουμε:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{hc}{\lambda'}}{\frac{hc}{\lambda}} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{\lambda}{2\lambda} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p' \cdot c}{p \cdot c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p' = \frac{p}{2}} \quad (2)$$

Από την Α.Δ.Ο σε άξονες έχουμε:

$$\text{Α.Δ.Ο}_{\underline{y}':\underline{y}':0} = p' \eta\mu\varphi - p_e \eta\mu\theta \xrightarrow[\varphi=60^\circ]{p'=\frac{p}{2}} \frac{p}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = p_e \eta\mu\theta \Rightarrow \boxed{p_e \eta\mu\theta = \frac{p\sqrt{3}}{4}} \quad (3)$$

$$\text{Α.Δ.Ο}_{\underline{x}':\underline{x}':p} = p = p' \sigma\upsilon\nu\varphi + p_e \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow p = \frac{p}{2} \sigma\upsilon\nu 60^\circ + p_e \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow p = \frac{p}{4} + p_e \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \boxed{p_e \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3p}{4}} \quad (4)$$

$$\frac{(3)}{(4)} \rightarrow \frac{p_e \eta\mu\theta}{p_e \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{p\sqrt{3}}{4}}{\frac{3p}{4}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}$$

Άρα σωστό το (i)

Β.

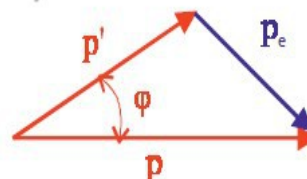
1ος τρόπος:

$$(3)^2 + (4)^2 : p_e^2 \eta^2\mu^2\theta + p_e^2 \sigma^2\upsilon\nu^2\theta = \left(\frac{p\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3p}{4}\right)^2 \Rightarrow p_e^2 = \frac{12p^2}{16} \Rightarrow \boxed{p_e = \frac{p\sqrt{3}}{2}}$$

2ος τρόπος:

Α.Δ.Ο διανυσματικά:

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \quad \underline{\eta} \quad \vec{p}_e = \vec{p}' - \vec{p}$$



Νόμος \underline{u} συνημιτόνων:

$$p_e^2 = p^2 + (p')^2 - 2p \cdot p' \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \xrightarrow{p' = \frac{p}{2}, \varphi = 60^\circ} p_e^2 = p^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2p \cdot \frac{p}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Rightarrow$$

$$p_e^2 = \frac{5p^2}{4} - \frac{p^2}{2} \Rightarrow p_e^2 = \frac{3p^2}{4} \Rightarrow \boxed{p_e = \frac{p\sqrt{3}}{2}}$$

Άρα σωστό το (iii)

Γ. Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου πρέπει να είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή $u < c$

• κλασσική \underline{u} σχέση \underline{u} :

$$p_e = m_0 \cdot u \Rightarrow u = \frac{p_e}{m_0} \xrightarrow{p_e = \frac{p\sqrt{3}}{2}} u = \frac{p\sqrt{3}}{2m_0} \Rightarrow u = \frac{E\sqrt{3}}{2m_0c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{E\sqrt{3}}{2m_0c} \Rightarrow u = \frac{\frac{hc}{\lambda}\sqrt{3}}{2m_0c} \Rightarrow u = \frac{h\sqrt{3}}{2m_0\lambda} \xrightarrow{(1): \lambda = \frac{h}{2m_0c}} u = \frac{h\sqrt{3}}{2m_0\left(\frac{h}{2m_0c}\right)} \Rightarrow u = \sqrt{3}c,$$

δηλαδή $\underline{u} > c$ (άτοπο)

• ρελατιβιστική \underline{u} σχέση:

$$p_e = \frac{m_0 \cdot u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \xrightarrow{\times c} p_e \cdot c = \frac{m_0 \cdot u \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \xrightarrow{p_e = \frac{p\sqrt{3}}{2}} \frac{p \cdot c \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{m_0 \cdot u \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{E\sqrt{3}}{2} = \frac{m_0 \cdot u \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m_0 \cdot u \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \xrightarrow{(1): \lambda = \frac{h}{2m_0c}} \frac{hc}{\frac{h}{2m_0c}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m_0 \cdot u \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$2m_0c^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m_0 \cdot u \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \Rightarrow c\sqrt{3} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \quad (5)$$

$$\text{Θέτουμε } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Τότε

$$(5) \rightarrow \gamma \cdot u = c\sqrt{3} \Rightarrow \gamma^2 \cdot u^2 = 3c^2 \Rightarrow \frac{u^2}{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} = 3c^2 \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = 3 \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{u^2}{c^2} + 3\frac{u^2}{c^2} = 3 \Rightarrow 4\frac{u^2}{c^2} = 3 \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{u = \frac{\sqrt{3}}{2}c} \text{ δηλαδή } u < c$$

Επομένως φυσικά παραδεκτό αποτέλεσμα για το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου δίνει η ρελατιβιστική σχέση ταχύτητας- ορμής.

Για το Υλικό
Φυσικής – Χημείας
Αϊλαμάκης Γιάννης
gailamakis26@gmail.com