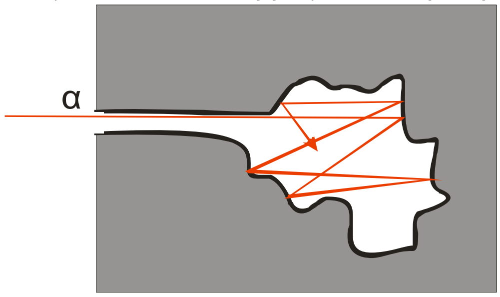
7. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

- Ακτινοβολία μέλανος σώματος
- Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
- Φαινόμενο Compton
- Κυματικές ιδιότητες σωματιδίων Louis de Broglie
- Η εξίσωση του Schrodinger
- Πηγάδια Δυναμικού - Φαινομένου σήραγγας

§7.2 Ακτινοβολία μέλανος σώματος

1) Μέλαν σώμα θεωρούμε εκείνο το σώμα που απορροφάει όλη την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει πάνω του σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες). Δηλαδή είναι μια ιδανική τελείως απορροφητική επιφάνεια.
Ένα μέλαν σώμα μπορεί να προσεγγιστεί από την κοιλότητα του σχήματος .
Κάθε ακτινοβολία που περνάει από την οπή **α** και εισέρχεται μέσα στην κοιλότητα , ανακλάται στην ανώμαλη επιφάνεια μέχρι να απορροφηθεί πλήρως. Έτσι η οπή **α** είναι ένα μέλαν σώμα .



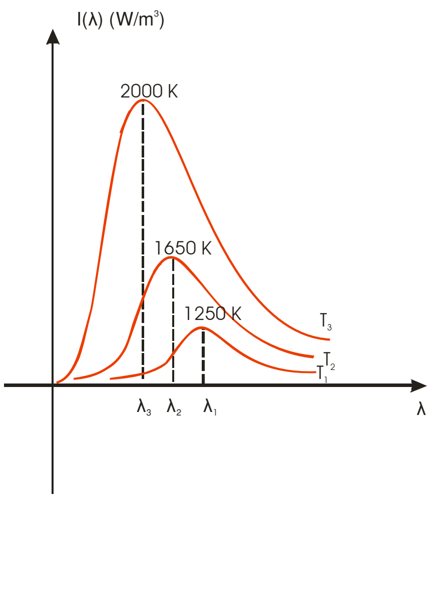
Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος έχει δυο χαρακτηριστικά :

α) Η ολική ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από την επιφάνεια (ισχύς / μονάδα επιφάνειας) του μέλανος σώματος (ιδανικός ακτινοβολητής) είναι

$$I = \sigma \cdot T^4$$

όπου σ: σταθερά των Stefan – Boltzmann και σε S . I είναι
$\sigma = 5,6 \cdot 10^{-8} \dfrac{W}{m^2 . k^4}$.

β) Η ένταση της , (ισχύς / μονάδα επιφάνειας) δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σ' όλα τα μήκη κύματος . Η κατανομή της έντασης Ι (λ) στα διάφορα μήκη κύματος της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος (ιδανικός ακτινοβολητής) φαίνεται στο σχήμα.



- Υπάρχει σε κάθε θερμοκρασία ένα μήκος κύματος (λ_1 , λ_2 , λ_3) αντίστοιχα) για το οποίο η εκπεμπόμενη ισχύς είναι μέγιστη .
- Καθώς όμως η θερμοκρασία αυξάνει , αυξάνεται και η μέγιστη ισχύς της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας αλλά το μήκος στο οποίο παρατηρείται το μέγιστο , μετατοπίζεται προς τ' αριστερά σε μικρότερα μήκη κύματος . Δηλαδή το μήκος κύματος λ_m στο οποίο παρατηρείται η μέγιστη ένταση (κορυφή της καμπύλης) , είναι

αντιστρόφως ανάλογο της απόλυτης θερμοκρασίας Τ . Δηλαδή

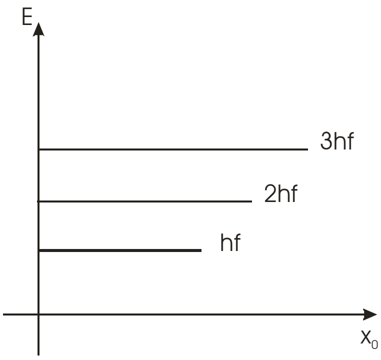
$$\lambda_m \cdot T = \text{σταθερά} = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ (m \cdot {}^oK)$$

Νόμος μετατόπισης του **Wien** .

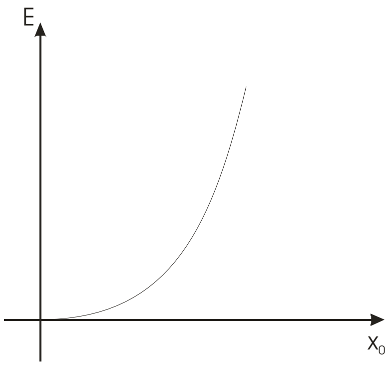
- Δηλαδή καθώς η θερμοκρασία αυξάνει , το ύψος της κορυφής Ι (λ) μεγαλώνει και η κορυφή μετατοπίζεται προς μικρότερα μήκη κύματος . Δηλαδή όταν αυξάνει η Τ καμπύλη πηγαίνει αριστερά και πάνω . Γι' αυτό ένα σώμα που ακτινοβολεί και φαίνεται μπλε είναι πιο θερμό από αυτό που έχει κόκκινο χρώμα γιατί έχει μικρότερο μήκος κύματος λ_m .
- Το συνολικό εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη είναι σε κάθε θερμοκρασία , η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας όπως υπολογίζεται από τη σχέση $I = \sigma \cdot T^4$.

2α) **Υπόθεση Rayleigh – Jeans :** Πηγή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι τα ηλεκτρικά φορτία , που υπάρχουν στα τοιχώματα της κοιλότητας . Αυτά συμπεριφέρονται , ως απλοί αρμονικοί ταλαντωτές και μπορούν να εκπέμπουν και να απορροφούν ακτινοβολία καθένας με τη χαρακτηριστική του συχνότητα ταλάντωσης . Επειδή λοιπόν στα τοιχώματα της κοιλότητας υπάρχει πολύ μεγάλο πλήθος από τέτοιος ταλαντωτές , με ανάλογο πλήθος συχνοτήτων , ακτινοβολία εμφανίζεται να έχει **συνεχές** φάσμα συχνοτήτων . Όπως ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής ορισμένης συχνότητας μπορεί να έχει οποιαδήποτε ενέργεια μεταξύ Ο και μιας ανώτατης τιμής , έτσι και οι ταλαντωτές της κοιλότητας , μπορούσαν να εκπέμπουν ή να απορροφούν ακτινοβολία με οποιαδήποτε ενέργεια μεταξύ Ο και μιας ανώτατης τιμής .
(Πράγμα που όπως έδειξε ο Planck ήταν λανθασμένο)

β) **Υπόθεση Max Planck :** Η σύλληψη όμως Planck , ήταν πως οι αρμονικοί ταλαντωτές που υπέθεσε ο Rayleigh εκπέμπουν ή απορροφούν ενέργεια όχι συνεχώς αλλά **ασυνεχώς** (αδιάκριτα) (κβαντική υπόθεση) .
Έτσι κάθε ταλαντωτής εκπέμπει ή απορροφά ενέργεια στη συχνότητα f μόνο κατά $E = N\,h\,f$ όπου το $h\,f$ ονομάζεται κβάντουμ ενέργειας ($N = 0,1,2,3....$) Δηλαδή η ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή είναι κβαντισμένη και μπορεί να πάρει διάκριτες τιμές (0 , h , f , 2 h f , 3 h f ...)



Κβαντική θεώρηση
για την ενέργεια κάθε ταλαντωτή



Κλασική θεώρηση

** Παρόλο , που κάθε ταλαντωτής της κοιλότητας εκπέμπει ή απορροφά ακτινοβολία σε ορισμένες συχνότητες , το φάσμα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι **συνεχές**, λόγω του μεγάλου πλήθους των ταλαντωτών **.

Παραδείγματα

1)Η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου είναι Τ= 6000 K
Α) τότε το μήκος κύματος της μέγιστης έντασης είναι
α) λ_m = 480 nm
β) λ_m = 600 nm
γ) λ_m = 100 nm
δ) λ_m = 1600 nm.

Απάντηση:

Ισχύει : Wien $\lambda_m \cdot T = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_m = \dfrac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{3}} = 0{,}48 \cdot 10^{-6} = 480$ nm.

Β) Η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς / μονάδα επιφάνειας (ένταση της ακτινοβολίας), είναι
α) $I = 7{,}25 \cdot 10^{7}$ W/m^2
β) $I = 1296 \cdot 10^{12}$ W/m^2
γ) $I = 7{,}25 \cdot 10^{-7}$ W/m^2
δ) $I = 1296 \cdot 10^{12}$ W/m^2 k^4 .

Απάντηση:

Ισχύει : Stefan – Boltzmann
$I = \sigma \cdot T^4 \Rightarrow I = 5{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot (6 \cdot 10^3)^4 \Rightarrow I = 7257 \cdot 10^4 = 7{,}25 \cdot 10^7$ W/m^2 .

2)Α) Αναφερόμαστε στο φαινόμενο Compton . Ακτίνες x με μήκος κύματος λ = 1 Å = 10^{-10} m κτυπούν στόχο από γραφίτη και η εξερχόμενη (σκεδαζόμενη) ακτινοβολία μετρείται σε γωνία 90^o ως προς την προσπίπτουσα . Τότε η μετατόπιση Δλ μεταξύ του μήκους κύματος της εξερχόμενης και της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αν $\lambda_c = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$m, είναι:
α) Δλ = 0
β) Δλ = 1 Å
γ) Δλ =0,024 Å
δ) Δλ =10^{-10} Å .

Απάντηση:

$\Delta\lambda = \dfrac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda c\,(1 - \cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu\theta}) \Rightarrow \Delta\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m = 0,024 Å .

Β) Τότε η κινητική του ενέργεια μετά την κρούση είναι :
α) 290 e V
β) 290 J

γ)0,4 . 10^{-16} e V
δ) 0 e V

Απάντηση:

Ισχύει K = h f – h f΄ δηλαδή αν από την αρχική ενέργεια (h f) του προσπίπτοντος φωτονίου , αφαιρέσουμε την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου. Άρα $K = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'} = h\,c\,(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}) = h\,c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda'} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 6{,}63.10^{-34}\,.3.10^{8}\,.(\frac{0{,}024}{1{,}024.10^{-10}}) \Rightarrow K = 19{,}89\,.\,10^{-16}\,.\,0{,}02 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 0{,}466\,.\,10^{-16}\ J = \frac{0{,}466.10^{-16}}{1{,}6.10^{-19}} = =0{,}29\,.\,10^{3} = 290\ eV.$

3) Αν η χαρακτηριστική ακτινοβολία ενός μέλανος σώματος (ιδανικού ακτινοβολητή) έχει μέγιστο σε μήκος κύματος $\lambda_m = 290$ nm τότε
Α) Η θερμοκρασία του μένος σώματος είναι
α) T = 100 K
β) T = 10^4 K
γ) T = 2,9 K
δ) T = 8,41 . 10^{-10} K.

Απάντηση:

$\lambda_m\ .\ T = σταθ = 2{,}9\ .\ 10^{-3} \Rightarrow T = \frac{2{,}9.10^{-3}}{2{,}9.10^{-7}} \Rightarrow T = 10^4$ K.

Β) Και η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς / μονάδα επιφάνειας του μέλανος σώματος είναι
α) I = 5,6 . 10^8 W/m^2
β) I = 5,6 . 10^{-8} W/m^2
γ) I = 5,6 W/m^2
δ) I = 5,6 . 10^{-4} W/m^2

Απάντηση:

$I = \sigma\ .\ T^4 = 5{,}6\ .\ 10^{-8}\ .\ 10^{16} \Rightarrow I = 5{,}6\ .\ 10^{8}\ W/m^2$.

Γενικά $\Delta x\ \Delta p > h$

$K = \frac{\rho^2}{2m} \Rightarrow e\,V = \frac{\rho^2}{2m} \Rightarrow \rho = \sqrt{2meV}$ άρα $\lambda = \frac{h}{\rho} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$.

§7.3 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο, από μια μεταλλική επιφάνεια, ελευθερώνονται ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αναφέρεται στη **σωματιδιακή φύση** του φωτός.
Το φως, ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια. Η κλασική θεωρία όμως αδυνατούσε να ερμηνεύσει το γεγονός, ότι η εξαγωγή των ηλεκτρονίων από το μέταλλο καθώς και η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται αυτά από την κάθοδο, εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και όχι από την συνολική ενέργεια (άρα από την ένταση της ακτινοβολίας), που μεταφέρει η φωτεινή δέσμη που προσπίπτει στο μέταλλο.

Σύμφωνα όμως με τον Einstein, κάθε φωτόνιο της δέσμης που προσπίπτει και φωτίζει την κάθοδο μεταδίδει όλη του την ενέργεια hf σε **ένα μόνο** από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Αν η ενέργεια hf του φωτονίου είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής W, το ηλεκτρόνιο δε μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Κάτι τέτοιο γίνεται μόνο αν η ενέργεια hf είναι μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής W. Έτσι στην πραγματικότητα μπορεί η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων να μην εξαρτάται από την συνολική ενέργεια της ακτινοβολίας αλλά εξαρτάται από το κβάντουμ ενέργειας E= hf.

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο παρατηρείται όταν πάνω σε μεταλλική κάθοδο, (π.χ με επίστρωση από ένα αλκαλιμέταλλο όπως K ή Cs) προσπέσει μονοχρωματικό φως του οποίου η συχνότητα είναι μεγαλύτερη από μια ελάχιστη τιμή που ονομάζεται σ υ χ ν ό τ η τ α κ α τ ω φ λ ί ο υ ($f = f_{op}$).

✓ Για να συμβεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο το e^- του ατόμου θα πρέπει **να είναι συνδεδεμένο και όχι ελεύθερο** έτσι ώστε να διατηρείται και η Α.Δ.Ε και η Α.Δ.Ο.

✓ Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο περιγράφεται με την Φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein.

$$\mathbf{K_{max} = \frac{1}{2} \cdot m\, \upsilon_{max}^2 = h \cdot f - W_{\varepsilon\xi}.}$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζεται η κινητική ενέργεια με την οποία ένα ηλεκτρόνιο της καθόδου εγκαταλείπει το μέταλλο.
Ακόμη από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein προκύπτει για

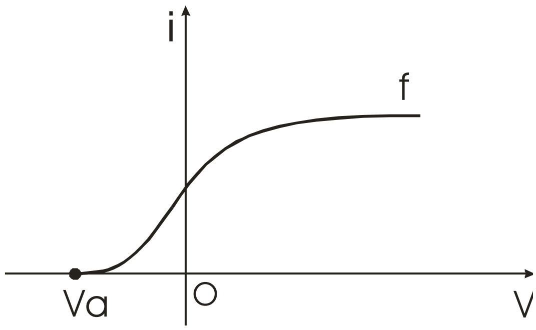
$K_{max} = 0$ (ή φωτοηλεκτρικό ρεύμα = 0), ότι $h \cdot f = W_{\varepsilon\xi} \Rightarrow f = \dfrac{W_{\varepsilon\xi}}{h}$ άρα

$f_{op} = \dfrac{W_{\varepsilon\xi}}{h}$.

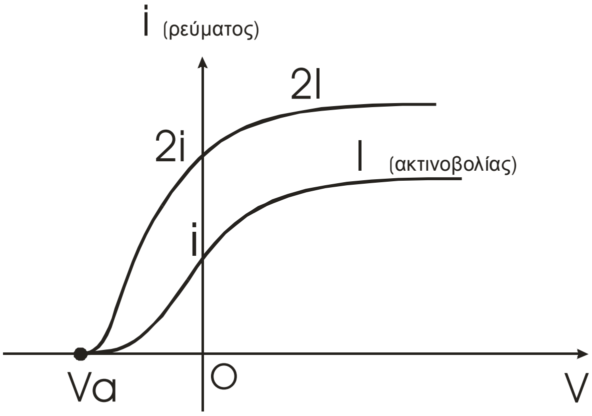
Παρατηρούμε ότι :
α) Η συχνότητα κατωφλίου εξαρτάται **μόνο** από το υλικό της ανόδου , ($W_{\varepsilon\xi}$), ενώ είναι ανεξάρτητη από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας .
Για τα περισσότερα μέταλλα βρίσκεται στην περιοχή του υπεριώδους και μάλιστα για λ μεταξύ 200 και 300 nm ενώ για το Na και τα οξείδια του Cs βρίσκεται στο ορατό φάσμα 400–700 nm .

β) Όταν η συχνότητα της ΗΛΜ ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου , τότε εκπέμπονται ηλεκτρόνια από την κάθοδο με αρκετά μεγάλες ταχύτητες και ακόμη και χωρίς τάση V στο εξωτερικό κύκλωμα . Ακόμη και όταν η πολικότητα V αντιστραφεί υπάρχει ρεύμα e μέχρι που η αντίστροφη τάση V να γίνει ίση με την τάση (δυναμικό) αποκοπής $V = V_α$ οπότε σταματά εντελώς η ροή ηλεκτρονίων . Δηλαδή η ροή e^- σταματά όταν $e \cdot V \geq K_{max}$ δηλαδή για $e \cdot V \geq K_{max}$, δεν παρατηρείται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο . Για V = Vα έχουμε $e \cdot Vα = K_{max} = \frac{1}{2} \cdot m\, υ^2_{max}$.

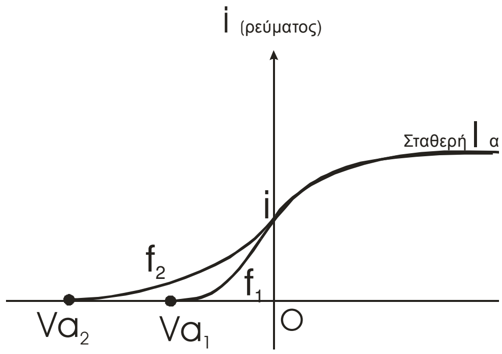
- Έτσι η ένταση (i) του φωτοηλεκτρικού ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση για μια σταθερή συχνότητα f είναι :



- Η ένταση (i) του φωτοηλεκτρικού ρεύματος είναι ευθέως ανάλογη της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (του φωτός) . Έτσι όταν διπλασιάζεται η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας διπλασιάζεται και η ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος δηλαδή εκπέμπονται περισσότερα ηλεκτρόνια . Παρατηρούμε όμως ότι η τάση αποκοπής Vα είναι ανεξάρτητη της I του προσπίπτοντος φωτός .



✓ Είπαμε για την τάση αποκοπής Vα ότι:
$e \cdot Vα = K_{max} = h \cdot f - W_{εξ} \Rightarrow$
$\Rightarrow Vα = \frac{h}{e} \cdot f - \frac{W_{εξ}}{e}$ $(Vα = |Vα|)$.
Άρα η τάση αποκοπής κατά απόλυτη τιμή εξαρτάται (αυξάνεται γραμμικά) από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (f) και άρα από το κβάντουμ ενέργειας ($E = h \cdot f$) της προσπίπτουσας ακτινοβολίας καθώς και από το υλικό της ανόδου ($W_{εξ}$).



Η πιθανότητα να λάβει χώρα το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ανάλογη της πέμπτης δύναμης του Z του υλικού ($\propto Z^5$).

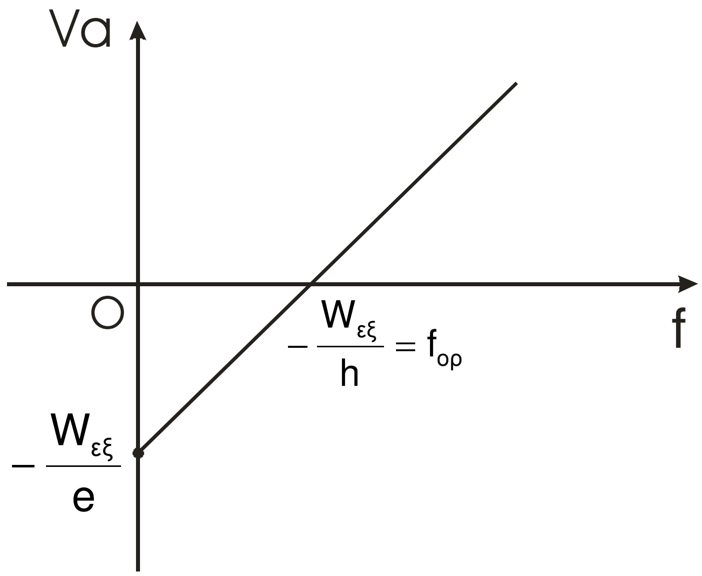
Έτσι για σταθερή ένταση ακτινοβολίας και για δυο συχνότητες f_1 και f_2 με $f_2 > f_1$ έχουμε $|Va_2| > |Va_1|$ π.χ αν $Va_1 = -10$ V τότε $Va_2 = -12$ V

Δηλαδή καθώς η συχνότητα f αυξάνεται γραμμικά και η τάση αποκοπής και άρα και η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρικών αφού

$e \cdot Va = K_{max} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{max}^2$.

Παρατηρήστε ακόμη από τη γραφική παράσταση ότι για σταθερή έντασης I φωτός παρόλο που έχουμε διαφορετική f και άρα διαφορετική τάση αποκοπής (Vα) η μέγιστη ένταση του ρεύματος των ηλεκτρονίων (i) παραμένει σταθερή.

Η γραφική παράσταση της τάσης της αποκοπής Vα σε συνάρτηση με τη συχνότητα του φωτός είναι:



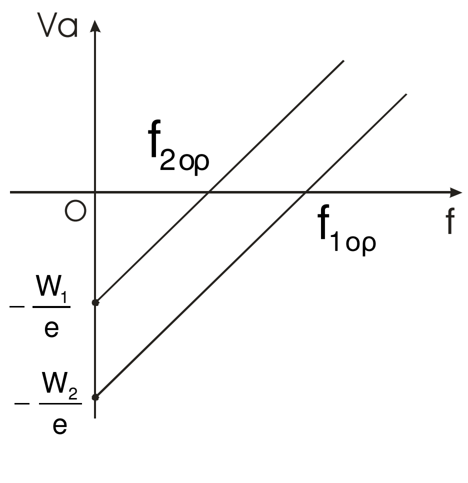
$Vα = \frac{h}{e} f - \frac{W_{εξ}}{e}$

Για $f = 0 \Rightarrow Vα = -\frac{W_{εξ}}{e}$

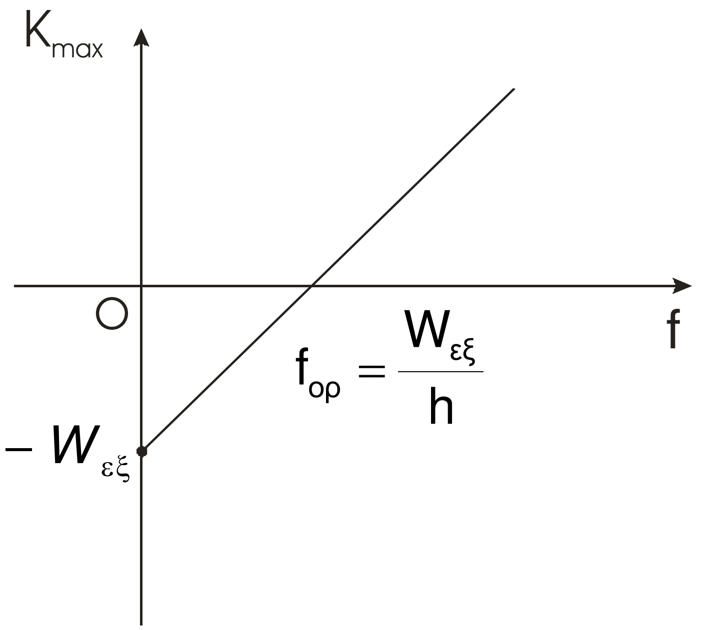
Για $Vα = 0 \Rightarrow f = f_{ορ} = \frac{W_{εξ}}{h}$ και ($e \cdot Vα = K_{max} = 0$).

- Παρατηρήστε πως η κλίση της ευθείας είναι ίση με $\frac{h}{e}$, άρα είναι σταθερή .

Έτσι ένα διαφορετικό υλικό καθόδου με διαφορετικό έργο εξαγωγής η ευθεία θα μετακινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω αλλά με την ίδια κλίση ($\frac{h}{e}$).



Η αντίστοιχη γραφική παράσταση της K_{max} σε συνάρτηση με την f της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι:



Ισχύει $K_{max} = h \cdot f - W_{εξ}$. Παρατηρούμε τότε πως:
Για $f = 0$, $K_{max} = - W_{εξ}$
Για $K_{max} = 0$, $f_{op} = \frac{W_{εξ}}{h}$.
Παρατηρούμε ακόμη πως η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων και άρα και η ταχύτητά τους δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας αλλά μόνο από τη συχνότητά της και μάλιστα αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Παραδείγματα

4)Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ένα ορισμένο μέταλλο και για φως κάποιας συχνότητας έχει δυναμικό αποκοπής .
$|Va| = 1$ Volt . Τότε η μέγιστη κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων είναι .
α) 2 eV
β) 1 eV
γ) 1,6 eV
δ) 10^{-19} J

Απάντηση:

$K_{max} = e \cdot Va = 1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J .

5) Για ένα ορισμένο μέταλλο που χρησιμοποιείται στην φωτοκάθοδο η τάση αποκοπής για προσπίπτουσα ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda = 300$n m είναι Va = 3 V
Τότε το έργο εξαγωγής του μετάλλου είναι:
α) $W_{εξ} = 9 \,.\, 10^{-7}$ J

β) $W_{εξ}$ = 1,6 e V
γ) $W_{εξ}$ =$1{,}83\cdot10^{-19}$ J
δ) $W_{εξ}$ = $4{,}8\cdot10^{-19}$ J.

Απάντηση:

Ισχύει : $Vα = \frac{h}{e}\, f - \frac{W_{εξ}}{e} \Rightarrow 3\,.\,1{,}6\,.\,10^{-19} = 6{,}63\,.\,10^{-34}\,.\,10^{15} - W_{εξ} \Rightarrow$
$W_{εξ} = 6{,}63\,.\,10^{-19} - 4{,}8\,.\,10^{-19} \Rightarrow W_{εξ} = 1{,}83\,.\,10^{-19}$ J.

6)Ένα μέταλλο που χρησιμοποιείται σε πείραμα φωτοηλεκτρικού φαινομένου έχει έργο εξαγωγής $W_{εξ}$ =1eV για συχνότητα προσπίπτοντος φωτός ίση με $f = 2{,}75\,.\,10^{15}$ Hz . Τότε αν $h = 6{,}4\,.\,10^{-34}$ J s και $m_e = 9\,.\,10^{-31}$ Kg η μέγιστη ταχύτητα των φωτοηλεκτρικών είναι

α) $\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot10^{6}$ m/s
β)$6{,}4\cdot10^{6}$ m/s
γ) $6\cdot10^{8}$ m/s
δ) $\frac{2}{3}\cdot10^{6}$ m/s.

Απάντηση:

Ισχύει : $K_{max} = h\,f - W_{εξ} \Rightarrow K_{max} = 6{,}4\,.\,10^{-34}\,.\,2{,}75\,.\,10^{15} - 1{,}6\,.\,10^{-19} \Rightarrow K_{max} = 16\,.\,10^{-19}$ J.

Όμως $K_{max} = \frac{1}{2} m\, υ_{max}^2 \Rightarrow υ_{max}^2 = \frac{2.16.10^{-19}}{9.10^{-31}} \Rightarrow υ_{max}^2 = 2.\frac{16}{9}.10^2 \Rightarrow υ_{max} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,.\,10^6$ m/s.

7) Φως μήκος κύματος λ = 300nm πέφτει στην επιφάνεια μετάλλου. Αν το δυναμικό αποκοπής είναι Vα = 1 Volt τότε το μήκος κύματος κατωφλίου(ελάχιστο μήκος κύματος) για να παρατηρηθεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι : ($c = λ\, f \Rightarrow$ $f = \frac{3.10^8}{3.19^{-7}} = 10^{15}$ Hz).

α) $λ_{ορ}$ = 395 nm
β) $λ_{ορ}$ =300 nm
γ) $λ_{ορ}$ =290 nm
δ) $λ_{ορ} = 300\cdot10^{-7}$ m.

Απάντηση:

Ισχύει $Vα = \frac{h}{e}\cdot f - \frac{W_{εξ}}{e} \Rightarrow 1{,}6\cdot10^{-19} = 6{,}63\cdot10^{-34}\cdot10^{15} - W_{εξ} \Rightarrow W_{εξ} = =5{,}03\cdot 10^{-19}$J.

Όμως$f_{ορ} = \frac{W_{εξ}}{h} = \frac{5{,}03.10^{-19}}{6{,}63.10^{-34}} = 0{,}758.10^{15}$Hz, ή $c=λ\cdot f \Rightarrow λ_{ορ} = \frac{3.10^8}{0{,}758.10^{15}} \Rightarrow \Rightarrow λ_{ορ}$ $=3{,}95.10^{-7}$=395 nm.

8) Αν αυξήσουμε την ένταση μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας που προσπίπτει στην κάθοδο ενός φωτοκυτάρου τότε ο αριθμός τον ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο σε ορισμένο χρόνο
α) μειώνεται
β) αυξάνεται
γ) παραμένει σταθερός
δ) εξαρτάται μόνο από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

9) Τα φωτοηλεκτρόνια βγαίνουν με μεγαλύτερη ταχύτητα από την κάθοδο όταν
α) η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αυξάνεται
β) το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αυξάνεται
γ) η ένταση της ακτινοβολίας αυξάνεται
δ) αυτή φωτίζεται με κόκκινο φως από ότι όταν φωτίζεται με μπλε.

10) Η συχνότητα κατωφλίου ($f_{ορ}$),
α) εξαρτάται μόνο από το έργο εξαγωγής του μετάλλου
β)είναι μεγαλύτερη για το Cs με $W_{εξ}$=1,4eV, από ότι για το K, με $W_{εξ}$=2,2eV
γ) εξαρτάται μόνο από την ένταση της ακτινοβολίας
δ) ανήκει υποχρεωτικά στην υπεριώδη περιοχή.

11) Η τάση αποκοπής (V_a),
α) εξαρτάται μόνο από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και είναι μεγαλύτερη για το K, με $W_{εξ}$=2,2eV από ότι για το Cs με $W_{εξ}$=1,4eV,
β) είναι μεγαλύτερη για την ακτινοβολία (1), από ότι για την (2) αν $f_2>f_1$,
γ) εξαρτάται μόνο από την ένταση της ακτινοβολίας
δ) εξαρτάται (αυξάνεται γραμμικά) από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

12) Τα ηλεκτρόνια που βγαίνουν από την επιφάνεια ενός μετάλλου που φωτίζεται με μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος 600nm έχουν κινητική ενέργεια 1eV. Τότε τα φωτοηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την ίδια επιφάνεια όταν αυτή φωτίζεται με ακτινοβολία μήκους κύματος 300nm, έχουν κινητική ενέργεια:
α) 2eV
β) 0,5eV
γ) 3eV
δ) δεν παρατηρείται το φαινόμενο
Δίνονται: h= 6,4(10-34j(s, c=3(108m/s και 1eV=1,6(10-19J.

Απάντηση:

Ισχύει : $K_1 = h\,\dfrac{c}{\lambda_1} - W_{εξ}$ και $K_2 = h\,\dfrac{c}{\lambda_2} - W_{εξ}$.Τότε K_1-K_2=$h\cdot c\cdot\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$ και τελικά προκύπτει K_2=3eV.

13) Το μήκος κύματος που πρέπει να έχει μια ΗΛΜ ακτινοβολία ώστε κάθε φωτόνιό της να έχει την ίδια ορμή με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα $υ=2,2\cdot10^{5}$m/s είναι :
α) $3\cdot10^{-8}$m
β) $1/3\cdot10^{-8}$m
γ) 333nm
δ) 0,33m
Δίνονται: h= $6,6\cdot10^{-34}$j·s, m_e= 9(10-31Kg.

Απάντηση:

Για το μήκος κύματος του φωτονίου της δεσμης ισχύει $λ=\frac{h}{p}$ και $p=\frac{h}{λ}$. Όμως για την ορμή του ηλεκτρονίου ισχύει p=m·υ. Τότε έχουμε $\frac{h}{λ}=$ m·υ ή $λ=\frac{h}{mυ}=\frac{6,6\,10^{-34}}{9\,10^{-31}.2,2.10^{5}}$ $=1/3\cdot10^{-8}$m ή 3,33nm.

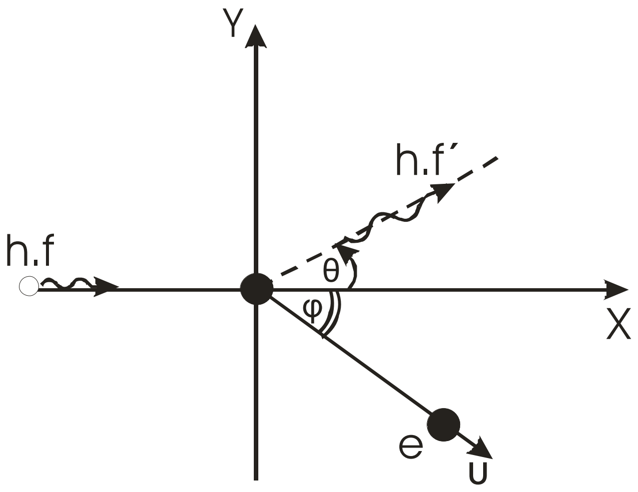
14) Ο αριθμός των φωτονίων με μήκος κύματος λ=663 nm που πρέπει να προσκρούουν ανά δευτερόλεπτο κάθετα σε μια απόλυτα ανακλαστική επιφάνεια, ώστε να ασκήσουν σ' αυτή δύναμη 2N είναι:
α) $5\cdot10^{26}$ φωτόνια/s
β) 10^{27} φωτόνια/s
γ) $2\cdot10^{27}$ φωτόνια/s
δ) $5\cdot10^{23}$ φωτόνια/s.

Απάντηση:

$F=\frac{Δp}{Δt}$. Όμως για τέλεια ανακλαστική επιφάνεια για κάθε φωτόνιο ισχύει $Δp=2p=2\frac{h}{λ}$. Τότε για ΔN φωτόνια θα έχουμε $Δp=ΔN\frac{2h}{λ}$. Τελικά προκύπτει:
$\frac{Δp}{Δt}=\frac{ΔN}{Δt}\frac{2h}{λ}$ ή $F=\frac{ΔN}{Δt}\frac{2h}{λ}$ ή $\frac{ΔN}{Δt}=\frac{F.λ}{2h}=\frac{2.663.10^{-9}}{2.6,63.10^{-34}}$ $=10^{27}$ φωτόνια/s.

§7.4 Φαινόμενο Compton

Το φαινόμενο Compton , αναφέρεται στη σωματιδιακή φύση του φωτός όπως και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.
Στο φαινόμενο Compton ένα φωτόνιο των ακτίνων x (ή γ) αλληλεπιδρά μ' ένα **ελεύθερο** ή χαλαρά συνδεδεμένο e^- (π.χ ενός μετάλλου ή γραφίτη) και **σκεδάζεται** (αλλάζει κατεύθυνση), με **μικρότερη** ενέργεια και άρα συχνότητα ή μεγαλύτερο μήκος κύματος . Το υπόλοιπο της ενέργειας του προσπίπτοντας φωτονίου το παίρνει το e^- (ηλεκτρόνιο), το οποίο ανακρούεται .



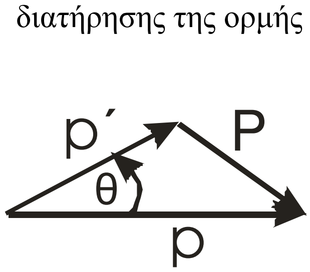
Δηλαδή φανταζόμαστε τη διαδικασία σκέδασης ως μια σύγκρουση δυο σωματιδίων. Του φωτονίου και ενός ελεύθερου e^- που είναι αρχικά ακίνητο.
$h \cdot f' < h \cdot f \Rightarrow f' < f \Rightarrow \lambda' > \lambda$.
Στα φωτόνια η ειδική θεωρία της σχετικότητας αποδίδει ορμή p που υπολογίζεται ως εξής:
$\mathbf{E^2 = (m\,c^2)^2 + (pc)^2}$
Επειδή για τα φωτόνια η μάζα ηρεμίας είναι μηδέν θα έχουμε
$E = pc \Rightarrow h\dfrac{c}{\lambda} = pc \Rightarrow p = \dfrac{h}{\lambda}$.

Τελικά από την Α.Δ.Μ.Ε και την Α.Δ.Ο προκύπτει

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} \cdot (1 - \text{συνθ}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η ολική σχετικιστική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι $E^2 = (m\,c^2)^2 + (pc)^2$
Για τα άμαζα σωματίδια όπως είναι το φωτόνιο έχουμε $E^2 = (pc)^2 \Rightarrow E = pc$, ενώ ένα ακίνητο σωματίδιο όπως το ηλεκτρόνιο έχει ενέργεια $E = K + mc^2$ ή
$E = mc^2$ (K=0).
Έτσι αρχικά το φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\varphi = pc$ ενώ το ακίνητο ηλεκτρόνιο (υ=0), έχει ενέργεια $E_{\eta\lambda} = mc^2$. Μετά τη κρούση και σκέδαση το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\varphi' = p'c$, ενώ το ηλεκτρόνιο έχει ενέργεια $E_{\eta\lambda}'$ με
$E_{\eta\lambda}'^2 = (m\,c^2)^2 + (p_{\eta\lambda}c)^2$ όπου $p_{\eta\lambda} = m\upsilon$.
Άρα από τη αρχή διατήρησης της ενέργειας **(Α.Δ.Ε)** $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{E_\varphi + E_{\eta\lambda} = E_\varphi' + E_{\eta\lambda}'} \Rightarrow pc + mc^2 = p'c + E_{\eta\lambda}' \Rightarrow (p-p')c + mc^2 = E_{\eta\lambda}' \Rightarrow$
$\Rightarrow [(p-p')c + mc^2]^2 = E_{\eta\lambda}'^2 \Rightarrow [(p-p')c + mc^2]^2 = (m\,c^2)^2 + (p_{\eta\lambda}c)^2$**.** Όμως από την αρχή διατήρησης της ορμής **(Α.Δ.Ο)** , η οποία σχηματικά παριστάνεται παρακάτω



προκύπτει για τα μέτρα των ορμών η σχέση:
$p^2_{\eta\lambda} = P^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\text{συνθ}$, άρα
$[(p-p')c + mc^2]^2 = (m\,c^2)^2 + (p^2 + p'^2 - 2pp'\text{συνθ})c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (p-p')^2\, c^2 + m^2c^4 + 2(p-p')mc^3 = m^2c^4 + (p^2 + p'^2 - 2pp'\text{συνθ})c^2 \Rightarrow$ με απλοποίηση του c^2 προκύπτει $(p-p')^2 + 2(p-p')mc = p^2 + p'^2 - 2pp'\text{συνθ} \Rightarrow$
$\Rightarrow p^2 + p'^2 - 2pp' + 2pmc - 2p'mc = p^2 + p'^2 - 2pp'\text{συνθ} \Rightarrow$

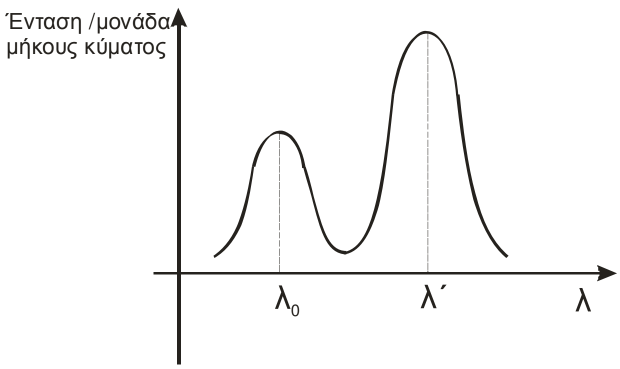
$\Rightarrow 2mc(p-p') = 2pp' - 2pp'\text{συνθ} \Rightarrow \dfrac{mc}{pp'}(p-p') = 1-\text{συνθ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{mc}(1-\text{συνθ})$. Όμως $p' = \dfrac{h}{\lambda'}$ και $p = \dfrac{h}{\lambda}$, άρα $\dfrac{\lambda'}{h} - \dfrac{\lambda}{h} = \dfrac{1}{mc}(1-\text{συνθ}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \dfrac{h}{mc}(1-\text{συνθ})$ ή $\boldsymbol{\Delta\lambda = \dfrac{h}{mc}(1-\text{συνθ}) = \lambda_c \cdot (1-\text{συνθ})}$.

Όπου θ είναι η γωνία της σκεδαζόμενης δέσμης των ακτινών Χ ,m είναι η μάζα του e^-, και $\dfrac{h}{mc}$ που έχει διαστάσεις μήκους κύματος ονομάζεται μήκος κύματος Compton λ_c του ηλεκτρονίου : $\lambda_c = \dfrac{h}{mc}$ και έχει σταθερή τιμή ίση με λ c = $\dfrac{6{,}63.10^{-34}}{9.10^{-31}.3.10^{8}} = 2{,}42 \,.\, 10^{-12}$ m .

- Για μεγάλες γωνίες σκέδασης θ , έχουμε μεγαλύτερο Δλ άρα έχουμε μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας των ακτίνων Χ .
- Όταν τα e^- δεν είναι ελεύθερα , αλλά είναι ισχυρώς δέσμια τότε στη σχέση $\Delta\lambda = \dfrac{h}{mc}(1 - \text{συνθ})$, μάζα m είναι η μάζα όλου του ατόμου και όχι του ελεύθερου e^-. Επειδή όμως η μάζα του ατόμου είναι πολύ μεγαλύτερη (10^4 φορές) γι' αυτό σ΄ αυτήν την περίπτωση $\Delta\lambda \approx 10^{-4}$ $A^o \approx 0$ δηλαδή οι μεταβολές στο μήκος κύματος είναι πολύ μικρές και δεν μπορούν να ανιχνευθούν πειραματικά και ουσιαστικά τότε δεν παρατηρείται το φαινόμενο Compton.
- Κατά την σκέδαση των ακτίνων x , κατά μια ορισμένη κατεύθυνση παρατηρούνται δυο μέγιστα της έντασης. Το πρώτο (λ_0), αντιστοιχεί στο μήκος κύματος των αρχικών ακτίνων x δηλαδή σε σκέδαση από **δέσμια** e, ενώ το μεγαλύτερο μήκος κύματος (λ΄), αντιστοιχεί στη σκέδαση Compton .



- Σύμφωνα με την κλασική θεωρία θα έπρεπε τα ηλεκτρόνια του υλικού να εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν προσπίπτει η ΗΛΜ ακτινοβολία και να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Έτσι θα έπρεπε και αυτά με τη σειρά τους να παράγουν σαν μικρές κεραίες ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας f . Σύμφωνα με την κλασική θεωρία, λοιπόν, θα έπρεπε η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει την ίδια συχνότητα και, άρα, το ίδιο μήκος κύματος με την προσπίπτουσα δέσμη.

Παραδείγματα

15) Αν σε μια σκέδαση Compton το μήκος κύματος Compton είναι

$\lambda_c = 2,4 \,.\, 10^{-12}$ m και η γωνία σκέδασης (παρατήρησης) είναι $\theta = 90^o$ τότε η μεταβολή του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι
α) $\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-12}$ m
β) $\Delta\lambda = 4,8 \cdot 10^{-12}$ m
γ) $\Delta\lambda = 0$
δ) $\Delta\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12}$ m.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - συν\theta)$ όμως $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ άρα $\Delta\lambda = \lambda_c \,.(1 - συν\, 90^o)$
$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_c = 2,4 \,.\, 10^{-12}$ m.

16) Στο φαινόμενο Compton
α) το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας X είναι μεγαλύτερο από αυτό της προσπίπτουσας,
β) τα σκεδαζόμενα φωτόνια έχουν μεγαλύτερη ενέργεια από τα προσπίπτοντα,
γ) $\Delta\lambda = 0$
δ) η διαφορά της ενέργειας των προσπίπτωντων και σκεδαζομένων φωτονίων είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

17) Στο φαινόμενο Compton, θεωρούμε ότι σκεδάζονται σε ηλεκτρόναι δυο δέσμες ακτινών X, με μήκη κύματος λ_1 και λ_2 με $\lambda_1 > \lambda_2$. Τότε για την ίδια γωνία σκέδασης,
α) η αύξηση ($\Delta\lambda$), στο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας X είναι μεγαλύτερη για την ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_1,
β) η αύξηση ($\Delta\lambda$), στο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας X είναι ίδια και στις δυο περιπτώσεις μια και εξαρτάται μόνο από τη γωνία σκέδασης,
γ) μεγαλύτερη κινητική ενέργεια αποκτά το ηλεκτρόνιο στο οποίο προκύπτει η ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_1
δ) Το $\Delta\lambda$ γίνεται μέγιστο σε κάθε περίπτωση όταν η γωνία της προσπίπτουσας και της σκεδαζόμενης δέσμης είναι 0^0.

Απάντηση:

Για τις περιπτώσεις (α) και (β), ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - συν\theta)$ οπότε για την ίδια γωνία σκέδασης θ, ισχύει $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$.
Στην περίπτωση (γ), επειδή $\lambda_1' = \lambda_1 + \frac{h}{mc}(1 - συν\theta)$ και παρόμοια
$\lambda_2' = \lambda_2 + \frac{h}{mc}(1 - συν\theta)$ και $\lambda_1 > \lambda_2$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1' > \lambda_2'$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου στην πρώτη περίπτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στη δεύτερη και άρα η κινητική ενέργεια αποκτά το ηλεκτρόνιο στο οποίο

προκύπτει η ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_2. Ή διαφορετικά $K_1=\frac{h.c}{\lambda_1}-\frac{h.c}{\lambda_1'}$ $=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1+\Delta\lambda)}\cdot hc$. Παρόμοια

$K_2=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_2(\lambda_2+\Delta\lambda)}\cdot hc$ και επειδή $\lambda_1>\lambda_2$ ισχύει $K_2>K_1$.

Τέλος στην περίπτωση (δ) και επειδή ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - συνθ)$, συμπεραίνουμε ότι το Δλ γίνεται μέγιστο όταν το συνθ, γίνεται ελάχιστο κατά απόλυτητ τιμή, δηλαδή όταν συνθ=0 ή όταν $θ=90^0$.

18)Σε μια σκέδαση Compton και για γωνία σκέδασης (παρατήρησης) $θ = 180^o$ η μεταβολή του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι

α) $\Delta\lambda = 0$

β) $\Delta\lambda = 2\cdot\frac{h}{mc}$

γ) $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}$

δ) $\Delta\lambda = 1/2\cdot\frac{h}{mc}$.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - συνθ)$ όμως $συν180^0=-1$ άρα $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}.(1+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow\Delta\lambda = 2\cdot\frac{h}{mc}$.

19)Σε μια σκέδαση Compton η ενέργεια ενός φωτονίου της δέσμης είναι E=0,5MeV. Τότε για γωνία σκέδασης $θ = 60^o$ η κινητική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι:

α) K = 0

β) K=0,25 MeV

γ) K = 0,165 MeV

δ) K=1,65 MeV.

Απάντηση:

Επειδή E=h·c/λ προκύπτει $\lambda=\frac{h.c}{E}=24\cdot10^{-13}$m.

Ακόμη ισχύει $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - συν60^0)= \frac{h}{2mc}=11,8\cdot10^{-13}$m και $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$ ή $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda=35,8\cdot10^{-13}$m.

Άρα η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου θα είναι $E'= h\cdot c/\lambda'=0,335$ MeV. Τότε όμως η ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου θα είναι ίση με τη μεταβολή της ενέργειας του φωτονίου άρα $K=E-E'=0,165$ MeV.

20) Αποδείξτε ότι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν μπορεί να συμβεί για ελεύθερα ηλεκτρόνια .

Απάντηση:
Έστω ότι τα e^- είναι ελεύθερο και ακίνητο και έχει ενέργεια ηρεμίας $E_o = m c^2$.
Τότε Α.Δ. Ε $\Rightarrow h f = E - E_o$ $^{(1)}$ όπου Ε είναι η τελική ενέργεια του φωτοηλεκτρονίου και h f η ενέργεια του φωτονίου
Ακόμη
Α.Δ.Ο $\Rightarrow \rho_{αρχ} = \rho_{τελ}$

$\rho_{αρχ} = \rho_{φ} + \rho_{ηλ} \Rightarrow \rho_{αρχ} = \frac{hf}{c}$.

$\rho_{τελ} = \rho_{φ}' + \rho_{ηλ}' \Rightarrow \rho_{τελ} = \rho_{ηλ}'$ όμως $E^2 = (m c^2)^2 + (\rho c)^2 \Rightarrow E^2 = E_o^2 + (\rho c)^2 \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{E^2 - E_o^2}}{c} = \rho_{ηλ}'$.

Άρα $\frac{hf}{c} = \frac{\sqrt{E^2 - E_o^2}}{c} \Rightarrow h f = \sqrt{E^2 - E_o^2} \Rightarrow^{(1)}$ $E - E_o = \sqrt{(E - E_o)(E + E_o)} \Rightarrow (E-E_o)^2 = (E - E_o)(E + E_o) \Rightarrow E - E_o = E + E_o \Rightarrow E_o = 0$, που είναι άτοπο και δεν ισχύει γιατί η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου δεν είναι μηδέν .

§7.5 και 7.6 Κυματικές ιδιότητες σωματιδίων
Louis de Broglie

1) Louis de Broglie

Ένα σωμάτιο με μηδενική μάζα ηρεμίας - τέτοιο είναι το φωτόνιο - έχει ενέργεια Ε = pc . Όμως είδαμε επίσης ότι η ενέργεια ενός φωτονίου είναι
$E = h\frac{c}{\lambda}$, συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ορμή του φωτονίου συνδέεται με το μήκος κύματός του με τη σχέση: $E = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow pc = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$.

Ο Louis de Broglie, πιστεύοντας στη συμμετρία της φύσης υπέθεσε ότι, όχι μόνο το φωτόνιο αλλά κάθε **κινούμενο** σωματίδιο έχει και κυματικές ιδιότητες. Τα πειράματα **περίθλασης** δέσμης ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα έδειξαν ότι και αυτά περιθλώνται όπως ακριβώς τα φωτόνια (ακτίνες Χ), άρα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι έχουν και κυματική συμπεριφορά. Παρόμοια πειράματα έγινα και με σωμάτια α καθώς και με νετρόνια με τα ίδια αποτελέσματα.
Γενικά λοιπόν για ένα κινούμενο σωματίδιο με ταχύτητα υ, ισχύει

$$\lambda = \frac{h}{m.\upsilon} = \frac{h}{p}.$$

Μήκος κύματος de Broglie.

με $E = h\cdot f$ και $\upsilon = \lambda\cdot f$.
Η παραπάνω σχέση συνδέει την ορμή, που είναι μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως είναι το μήκος κύματος. Ο μεταξύ τους σύνδεσμος είναι η σταθερά h του Planck. Πάντως τα κινούμενα σωματίδια **δεν**

εμφανίζουν ταυτόχρονα και τις δυο φύσεις τους. Έτσι υπάρχουν φαινόμενα που ερμηνεύονται με τη σωματιδιακή τους φύση και άλλα με την κυματική τους φύση.

2) Αρχή της αβεβαιότητας ή της απροσδιοριστίας του Heisenberg

✓ Αν η ορμή p, ενός κινούμενου σωματιδίου είναι πλήρως καθορισμένη τότε σε αυτήν αντιστοιχεί κατά de Broglie και ένα μήκος κύματος που θα είναι επίσης πλήρως καθορισμένο $\lambda=\frac{h}{p}$. Αν θεωρήσουμε ότι το κινούμενο σωματίδιο έχει και κυματικές ιδιότητες, τότε το στιγμιότυπο ενός γραμμικού αρμονικού κύματος με συγκεκριμένο λ και τη χρονική στιγμή t=0, περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $y=A\cdot\eta\mu 2\pi\frac{x}{\lambda}$. Όμως τότε το x, μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$. Στο ερώτημα λοιπόν που βρίσκεται το σωματίδιο εισάγεται μια αβεβαιότητα. Το σωματίδιο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο διάστημα από $-\infty$ έως $+\infty$. Έτσι λοιπόν όσο ποιο βέβαιοι είμαστε για το μήκος κύματος (λ), άρα και την ορμή (p), του κινούμενου σωματιδίου τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα (απροσδιοριστία) Δx, ως προς τη θέση του (x).

✓ Ένα σωματίδιο συνήθως όμως δεν είναι ελεύθερο να κινείται σε όλο το χώρο ή έστω σε όλον τον άξονα xox΄, αλλά συνήθως είναι παγιδευμένο σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου. Μια τέτοια παγίδα για το ηλεκτρόνιο είναι συνήθως το άτομο στο οποίο ανήκει αυτό. Έχουμε λοιπόν ένα κύμα περιορισμένο στο χώρο. Ένα τέτοιο κύμα θα το ονομάζουμε **κυματοπακέτο** και τέτοια κυματοπακέτα θα χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κυματική συμπεριφορά των κινούμενων σωματιδίων.

✓ Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Με την υπέρθεση μεγάλου αριθμού κυμάτων (μεγάλη αβεβαιότητα στο λ άρα και στην ορμή (Δp)), μπορούμε να συνθέσουμε ένα κυματοπακέτο περιορισμένο σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Τότε λέμε ότι έχουμε περιορισμένη αβεβαιότητα Δx, ως προς τη θέση του στο χώρο και τόσο πλησιάζουμε την σωματιδιακή εικόνα του σωματίου.

✓ Έτσι λοιπόν σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητα (ή απροσδιοριστίας) του Heisenberg είναι αδύνατο να προσδιορίσουμε ταυτόχρονα και τη θέση και την ορμή (άρα ταχύτητα) ενός σωματιδίου στο χώρο.

Τα παραπάνω κωδικοποιούνται με τις σχέσεις:

- $\Delta x\cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$ και $\Delta y \,.\, \Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi}$ και $\Delta z \,.\, \Delta p_z \geq \frac{h}{2\pi}$. Όμως η βεβαιότητα σε μια συντεταγμένη δεν σχετίζεται με διαφορετική συνιστώσα ορμής π.χ , η Δx δεν σχετίζεται άμεσα με τη Δp_y.
- Γενικά Δx : αβεβαιότητα ως προς τη θέση και Δp : αβεβαιότητα ως προς την ορμή .
- Ακόμη $\Delta x\cdot \Delta(m\cdot \upsilon_x) \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x\cdot\Delta \upsilon_x \geq \frac{h}{2\pi m}$.
- Αν $\Delta p \to 0$ τότε $\Delta x \to \infty$.

- **Αβεβαιότητα στην ενέργεια:**

Μια άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας είναι η $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$. Δηλαδή για να μετρήσουμε με ακρίβεια την ενέργεια ενός κινούμενου σωματιδίου πρέπει να διαθέτουμε άπειρο χρόνο. Δηλαδή για $\Delta E \rightarrow 0$, πρέπει $\Delta t \rightarrow \infty$. Έτσι όσο πιο μεγάλο είναι το Δt τόσο μικρότερη είναι η βεβαιότητα ως προς την ενέργεια (ΔE) και τόσο πιο καλά καθορισμένη είναι αυτή. Όσο πάλι πιο μικρό είναι το Δt τόσο πιο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια.

Έτσι π.χ, γνωρίζουμε πως ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν αποδιεγείρεται από μια διεγερμένη κατάσταση και γνωρίζουμε πως σε κάθε ενεργειακό άλμα εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Από τη μελέτη των φασμάτων εκπομπής συμπεραίνουμε ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες (μαθηματικές γραμμές), αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. **Το εύρος των φασματικών γραμμών εξηγείται με την αρχή της αβεβαιότητας.**

Ένα διεγερμένο άτομο παραμένει στη διεγερμένη κατάσταση για χρόνο της τάξης του 10^{-8}s και στη συνέχεια αποδιεγείρεται με ένα ή περισσότερα ενεργειακά άλματα εκπέμποντας ακτινοβολία.

Τότε από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$, προκύπτει $\Delta(hf) \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ ή

$h \cdot \Delta f \geq \frac{h}{2\pi \Delta t}$ ή $\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \Delta t}$ και για $\Delta t = 10^{-8}$s προκύπτει $\Delta f \geq 1{,}6 \cdot 10^7$Hz όπου το $\Delta f_{min} = 1{,}6 \cdot 10^7$Hz, είναι το ελάχιστο εύρος μιας φασματικής γραμμής.

Παραδείγματα

21)Ένα e^- περιορίζεται σ' ένα κυβικό κουτί πλευράς $\alpha = 6{,}63 \cdot 10^{-11}$ m . Τότε η ελάχιστη αβεβαιότητα στην ορμή e^- είναι

α) $\Delta p x = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ kg m/s

β) $\Delta p x = 19{,}89 \cdot 10^{-24}$ kg m/s

γ) $\Delta p x = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ kg m/s

δ) $\Delta p x = \frac{5}{\pi} \cdot 10^{-24}$ kg m/s.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta p x \,.\, \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ την ελάχιστη αβεβαιότητα $\Delta p x$ θα την έχουμε όταν το Δx είναι μέγιστο , δηλαδή $\Delta x = \alpha = 6{,}63 \,.\, 10^{-11}$ m . Οπότε $\Delta p x \,.\, \Delta x = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta p x =$

$$\frac{h}{2\pi \Delta x} = \frac{6{,}63.10^{-34}}{2\pi.6{,}63.10^{-11}} = \frac{10^{-23}}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \cdot 10^{-24} \text{ kg. m/s.}$$

22) Το άτομο το υδρογόνου παραμένει στην πρώτη διεγερμένη στάθμη ($n = 2$) για χρόνο της τάξης $\Delta t = 10^{-8}$ sec . Αν $E_1 = -13{,}6$ e V τότε η αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια στη στάθμη αυτή του υδρογόνου είναι:

A)

α) $\Delta E = 6{,}25 \cdot 10^{-8}$ eV

β) $\Delta E = 10^{-26}$ eV

γ) $\Delta E = 6{,}25 \cdot 10^{-8}$ J

δ) $\Delta E = 13{,}6 \cdot 10^{-8}$ eV.

Απάντηση:

Ισχύει $\Delta E\ .\ \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{h}{2\pi.\Delta t}$.

Για την ελάχιστη αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια έχουμε $\Delta E = \frac{h}{2\pi.\Delta t} =$ $\frac{6{,}63.10^{-34}}{2\pi.10^{-8}} \Rightarrow \Delta E \approx 10^{-26}$ J ή $\Delta E = \frac{10^{-26}}{1{,}6.10^{-19}} = 0{,}625 \cdot 10^{-7} = 6{,}25 \cdot 10^{-8}$ e V.

Β) Το μήκος κύματος του φωτονίου που εκπέμπεται καθώς το προηγούμενο άτομο αποδιεγείρεται από τη $n = 2$ στη $n = 1$ είναι
α) $\lambda = 600$nm
β) $\lambda = 750$nm
γ) $\lambda = 121$nm
δ) $\lambda = 500$nm.

Απάντηση:

Ισχύει $E_2 - E_1 = h\,\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} \Rightarrow \lambda = \frac{6{,}63.10^{-34}.3.10^{8}}{(-3{,}4+13{,}6).1{,}6.10^{-19}} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{19{,}89.10^{-26}}{16{,}32.10^{-19}} \Rightarrow \lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \lambda = 121$ nm.

Γ) Το φυσικό εύρος στο μήκος κύματος της φασματικής γραμμής είναι
α) $\Delta\lambda = 121$ nm
β) $\Delta\lambda = 74 \cdot 10^{-8}$nm
γ) $\Delta\lambda = 74$ nm
δ) $\Delta\lambda = 121 \cdot 10^{-8}$ nm.

Απάντηση:

Κατά την αποδιέγερση εκπέμπεται φωτόνιο ενέργειας $E = E_2 - E_1 \Rightarrow E = 10{,}2$ e V .

Τότε η κλασματική αβεβαιότητα ενέργειας είναι $\frac{\Delta E}{E} = \frac{6{,}25.10^{-8}}{10{,}2} = 0{,}61 \cdot 10^{-8}$.

Άρα $\Delta\lambda = 0{,}61 \cdot 10^{-8} \cdot \lambda = 0{,}61 \cdot 10^{-8} \cdot 121 \Rightarrow \Delta\lambda = 74 \cdot 10^{-8}$ nm
Αυτό το $\Delta\lambda$ ονομάζεται φυσικό εύρος γραμμής .

23) Τα άτομα του αερίου που περιέχονται σε σωλήνα διαφημίσεων διεγείρονται σε μια ενεργειακή στάθμη , που έχει μέσο χρόνο ζωής $\tau = 10^{-8}$ s . Ποια είναι η τάξη μεγέθους του φυσικού εύρους $\Delta\nu$ της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται κατά την αποδιέγερση; (Εξ 2002)
α) KH_Z
β)MH_Z
γ)H_Z
δ)GH_Z.

Απάντηση:

Για την ελάχιστη αβεβαιότητα ως προς την ενέργεια ισχύει
$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta E = \frac{h}{2\pi.\Delta t} \Rightarrow h\ .\ \Delta f = \frac{h}{2\pi.\Delta t} \Rightarrow \Delta f = \frac{10^8}{2\pi} \approx 16\ .\ 10^6$ Hz ή 16 MHz.

24) Ένα σωματίδιο κινείται στον άξονα x΄ox με ταχύτητα πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός. Αν η αβεβαιότητα της θέσης του είναιίση με το μήκος κύματός του κατά de Broglie, τότε η ελάχιστη αβεβαιότητα της ταχύτητάς του είναι:

α) $\Delta \upsilon_x = \frac{\upsilon_x}{2\pi.\Delta t}$

β) $\boldsymbol{\Delta \upsilon_x = \frac{\upsilon_x}{2\pi}}$

γ) $\Delta \upsilon_x = \frac{h}{p}$

δ) $\Delta \upsilon_x = \frac{h}{p.\Delta t}$

Απάντηση:

Για το μήκος κύματος κατά de Broglie ισχύει $\lambda = \frac{h}{p}$. Επειδή υ<<c, ισχύει και $p = m \cdot \upsilon_x$, άρα έχουμε $\lambda = \frac{h}{m.\upsilon_x}$. Ακόμη $\Delta x = \lambda = \frac{h}{m.\upsilon_x}$. Ισχύει $\Delta p x\ .\ \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ ή

$m\Delta \upsilon x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ ή $m\Delta \upsilon x \cdot \frac{h}{m.\upsilon_x} \geq \frac{h}{2\pi}$ ή $\Delta \upsilon x \geq \frac{\upsilon_x}{2\pi}$. Άρα η ελάχιστη αβεβαιότητα της ταχύτητάς του είναι $\Delta \upsilon x = \frac{\upsilon_x}{2\pi}$.

§7.7 Η εξίσωση του Schrödinger

✓ Είπαμε προηγουμένως ότι ένα σωματίδιο συνήθως δεν είναι ελεύθερο να κινείται σε όλο το χώρο ή έστω σε όλον τον άξονα xox΄, αλλά είναι παγιδευμένο σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου και ότι μια τέτοια παγίδα για το ηλεκτρόνιο είναι συνήθως το άτομο στο οποίο ανήκει αυτό.

✓ Έχουμε λοιπόν ένα κύμα περιορισμένο στο χώρο (**κυματοπακέτο**). Ένα κύμα όμως περιορισμένο στο χώρο μας θυμίζει το στάσιμο «κύμα».

✓ Στη μονοδιάστατη περίπτωση κίνησης, θεωρούμε ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x μέσα σε κουτί ή αλλιώς πηγάδι απείρου βάθους . Το σωματίδιο κινείται μέσα στο κουτί ανακλώμενο ελαστικά μεταξύ δυο ακλόνητων τοίχων σε απόσταση L .

✓ Επειδή $\mathbf{0 \leq x \leq L}$ πρέπει η κυματοσυνάρτησή του να μηδενίζεται έξω απ' αυτό το διάστημα. Επιπλέον πρέπει η Ψ να είναι συνεχής συνάρτηση του x και θα πρέπει να μηδενίζεται στα σημεία x = 0 και x = L (συνοριακές συνθήκες).

Αυτές όμως οι παραδοχές μας θυμίζουν τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης χορδής με ακλόνητα τα δυο της άκρα . Οπότε έχουμε τη δημιουργία στάσιμου κύματος που προκύπτει από την επαλληλία των

$y_1 = A'$ ημ $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και $y_2 = -A'$ ημ $2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ όποτε η εξίσωση για το στάσιμο κύμα είναι:

$y = 2A'$ ημ $2\pi\frac{x}{\lambda}$ συν $2\pi\frac{t}{T}$.

Το πλάτος του στάσιμου κύματος είναι $\psi = A$ ημ $2\pi\frac{x}{\lambda}$ ή

$\psi = A$ ημ Kx

($K = \frac{2\pi}{\lambda}$ κυματάριθμος και $A=2A'$).

Τότε και η συνάρτηση που περιγράφει την κυματική συμπεριφορά του κινούμενου σωματιδίου δηλαδή το κυματοπακέτο θα είναι της μορφής

$$\psi(x) = A \text{ ημ } 2\pi\frac{x}{\lambda}.$$

Η εξίσωση μορφής $\boldsymbol{\psi(x)=A\cdot}$**ημ** $\boldsymbol{2\pi\frac{x}{\lambda}}$ είναι η γενική μορφή κυματοσυνάρτησης σωματιδίου σε κουτί.

Όμως για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα σε χορδή μήκους L, θα πρέπει για το μήκος της χορδής να ισχύει η σχέση $\boldsymbol{L = n\cdot\frac{\lambda}{2}}$. Έτσι και για το κυματοπακέτο ισχύει η ίδια σχέση, όπου L είναι το μήκος του κουτιού και λ το μήκος κύματος κατά de Broglie του κινούμενου σωματιδίου .

Άρα ισχύει $\rho = \frac{h}{\lambda}$ και $E= \frac{\rho^2}{2m}$. Όμως $\lambda = \frac{2L}{n}$ άρα $\boldsymbol{\rho = \frac{nh}{2L}}$ και

$\boldsymbol{E = \frac{n^2h^2}{8mL^2}}$ κβαντισμένη ενέργεια .

Η παραπάνω σχέση υπολογίζει την ενέργεια του e^-, σε **πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους**. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύει $E_n=n^2\cdot E_1$, δηλαδή η ενέργειά του είναι ανάλογη του n^2.

Παρατηρήστε ότι η ολική ενέργεια δεν μπορεί να είναι μηδέν $n \neq 0$ γιατί θα παραβιάζονταν η αρχή της αβεβαιότητας.

Δηλαδή για κάθε τιμή του n έχουμε διαφορετικό λ , ρ και Ε οπότε αν τα ονομάσουμε λ_n , ρ_n και E_n προκύπτει $\rho_n = \frac{nh}{2L} = \frac{h}{\lambda_n}$ και $E_n = \frac{\rho_n^2}{2m} \Rightarrow E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$ $n = 1,2,3$ ... ενώ και οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_{n\,(x)}$ για το σωματίδιο μέσα στο κουτί για της διάφορες τιμές του n θα έχουν τη γενική μορφή :

$\Psi_{n\,(x)} = A$ ημ $2\pi\frac{x}{\lambda}$ επειδή όμως $\lambda = \frac{2L}{n}$ τελικά για **πηγάδι απείρου βάθους** έχουμε:

$\boldsymbol{\psi_{n\,(x)} = A\cdot}$**ημ** $\boldsymbol{\frac{n\,\pi\,x}{L}}$ **για** $\boldsymbol{0 \le x \le L}$ $\boldsymbol{n \ge 1,2,3}$ **... ενώ**

$\psi_{n\,(x)} = 0$ για $x < 0$ ή $x > L$

- Το $|\Psi|^2$ dx εκφράζει την **πιθανότητα** να βρίσκεται το σωματίδιο στο μικρό διάστημα dx κοντά στο x.

Άρα $|\Psi|^2 dx = A^2 \eta\mu^2 \frac{n\pi x}{L} dx$. Όμως τότε το άθροισμα των πιθανοτήτων δηλαδή η ολική πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο διάστημα $0 \le x \le L$ πρέπει να είναι ίσο με την μονάδα δηλαδή:

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx = \int_0^L A^2\ \eta\mu^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1$$

Όμως $\int_0^L A^2 \eta\mu^2 \frac{n\pi x}{L} = A^2 \frac{L}{2}$, άρα $A^2 \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

Μια κυματοσυνάρτηση Ψn (x) με $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ δηλαδή τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση $\int_0^L |\Psi|^2 dx = 1$ (συνθήκη κανονικοποίησης) , ονομάζεται κανονικοποιημένη ή νορμαλοποιημένη ενώ η διαδικασία προσδιορισμού της σταθεράς Α ονομάζεται κανονικοποίηση (νορμαλοποίηση) .

Άρα οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου σε κουτί για διάφορες τιμές του n είναι:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \eta\mu\ \frac{n\,\pi\,x}{L}$$

Παρατηρείστε : ότι αν η αβεβαιότητα ως προς τη θέση είναι $\Delta x = L$ και η αβεβαιότητα ως προς την ορμή είναι $\Delta p = \frac{h}{2L}$ για $n = 1$ τότε $\Delta x\ \Delta p = L \frac{h}{2L} = \frac{h}{2}$.

✓ Στην περίπτωση κίνησης στο χώρο το γινόμενο $|\Psi|^2 dV$, εκφράζει την πιθανότητα να βρίσκεται το e^-, γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x,y,z) και σε έναν ορισμένο όγκο dV. Τότε η συνθήκη κανονικοποίησης γίνεται $\int |\Psi|^2\ dV = 1$.

✓ Την απάντηση στο πως βρίσκουμε μια κυματοσυνάρτηση την έδωσε ο **Erwin Schrödinger**.

Επειδή οι κυματοσυναρτήσεις Ψ_n (x) περιγράφουν ενεργειακές καταστάσεις στις οποίες μπορεί δυνητικά να βρεθεί ένα σωματίδιο ο Schrödinger προσπάθησε να βρει τη βασική σχέση μεταξύ των κυματοσυναρτήσεων Ψ_n (x) και των ενεργειακών σταθμών En.

Η γενική λύση των κυματοσυναρτήσεων σε κουτί είναι όπως είπαμε

$\Psi_{(x)} = A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda}$.

Παρατήρησε λοιπόν ότι η δεύτερη παραγωγός της Ψ_n (x) ως προς x είναι

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\pi A}{\lambda}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\ \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\ A\ \eta\mu\ \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Ακόμη η ενέργεια μιας κατάστασης είναι ως γνωστό $E = \frac{\rho^2}{2m}$ με $\rho = \frac{h}{\lambda}$ άρα $E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε την ενέργεια Ε με την κυματοσυνάρτηση Ψ τότε προκύπτει

$E \cdot \Psi = \frac{h^2}{2m\lambda^2} A \, ημ \frac{2\pi x}{\lambda}$ (1)

Όμως αν πολλαπλασιάσουμε και την $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ με τον παράγοντα $\frac{-h^2}{8\pi^2 m}$ προκύπτει :

$$\frac{-h^2}{8\pi^2 m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} = + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} A \, ημ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} A \, ημ \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (2)$$

Άρα από τις (1) και (2) προκύπτει

$- \frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} = E \cdot \Psi$ ή επειδή $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ γράφεται

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} = \mathbf{E \cdot \Psi},$$

που αποτελεί και την απλούστερη μορφή της **εξίσωσης του Schrödinger** και αναφέρεται σ' ένα **ελεύθερο** σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα των x σε κουτί , άρα **χρονοανεξάρτητη εξίσωση** , χωρίς την επίδραση κάποιας δύναμης άρα ύπαρξης δυναμικού .

Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται είναι κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης με τα τοιχώματα του δοχείου.

Ακόμη στη συγκεκριμένη περίπτωση η ολική ενέργεια Ε είναι ίση με την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου αφού η δυναμική του ενέργεια είναι μηδεν. Άρα $E=K=\frac{\rho^2}{2m}$.

- Αν όμως το σωματίδιο υπόκειται στην επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης F (x) κατά μήκος του άξονα των x τότε λαβαίνοντας υπόψη μας και την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια U(x) , τότε η γενίκευση αυτή για τη μονοδιάστατη εξίσωση του Schrödinger μας οδηγεί στη σχέση

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \mathbf{U \cdot \Psi = E \cdot \Psi}.$$

Η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν U = 0 στο διάστημα $0 \le x \le L$ και απειρίζεται οπουδήποτε αλλού, έξω από το διάστημα αυτό.

Στην περίπτωση αυτή η ολική ενέργεια Ε είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας δηλαδή $E=\frac{p^2}{2m}+U=K+U$.

Χωρίς όμως να είναι δυνατή σε κάποιο σημείο του χώρου η ταυτόχρονη γνώση της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας γιατί τότε θα χρειάζονταν η ταυτόχρονη γνώση της θέσης και της ορμής πράγμα το οποίο παραβιάζει την αρχή της αβεβαιότητας.

✓ Στις τρεις διαστάσεις η χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger γίνεται $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi + U\cdot\Psi = E\cdot\Psi$

✓ Στη γενικότερη περίπτωση πάντως η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση όχι μόνο της θέσης αλλά και του χρόνου δηλαδή Ψ=Ψ(x,y,z,t).
Για την χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger, προκύπτει ότι ισχύει:
$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi + U\cdot\Psi = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$, η οποία για ελεύθερο σωμαίδιο μάζας m γίνεται $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Σε αυτή την περίπτωση για ελεύθερο σωματίδιο μάζας m, σε μια αυθαίρετη διεύθυνση $\vec{k}$, η παραπάνω εξίσωση Schrödinger, έχει λύση την κυματοσυνάρτηση $\Psi=e^{i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)}$, με $\vec{p}=\hbar\cdot\vec{k}$ και $E=\hbar\cdot\omega$. Επειδή όμως ισχύει και $E=\frac{p^2}{2m}$ έχουμε και
$\hbar\cdot\omega=\frac{k^2\hbar^2}{2m}$ ή $\omega=\frac{\hbar k^2}{2m}$.

✓ Η σύγχρονη κβαντομηχανική θεμελιώνεται και με τις παρακάτω προτάσεις:

Α. Σε κάθε μετρήσιμο φυσικό μέγεθος Α αντιστοιχεί ένας γραμμικός ερμιτιανός τελεστής $\hat{A}$ έχοντας υπόψη μας ότι :
$\vec{r}\rightarrow\hat{\vec{r}}=\vec{r}$ και
$\vec{p}\rightarrow\hat{\vec{p}}=-i\hbar\vec{\nabla}$.
Αυτό πιο απλά σημαίνει ότι ο τελεστής του x είναι το ίδιο το x δηλαδή $\hat{x}$=x παρόμοια $\hat{y}$=y και $\hat{z}$=z. Ακόμη $\hat{p}_x=-i\hbar\frac{d}{dx}$ και $\hat{p}_y=-i\hbar\frac{d}{dy}$ και $\hat{p}_z=-i\hbar\frac{d}{dz}$.

Ακόμη για την ενέργεια ορίζεται ο τελεστής ενέργειας $\hat{E}$ με $\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$.

Τέλος ο Hamiltonian τελεστής είναι $\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V=-\frac{\hbar^2}{2m}+V$. Τότε και η χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger, γράφεται:
$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi + V\cdot\Psi = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ **ή** $\hat{H}\Psi = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Ενώ για την χρονοανεξάρτητη εξίσωση $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\nabla^2\Psi + V\cdot\Psi = E\Psi$ προκύπτει $\hat{H}\Psi=E\Psi$.

Β. Οι τιμές του φυσικού μεγέθους Α, ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου ερμιτιανού τελεστού του $\hat{A}$ οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί.

Γ. Η κυματοσυνάρτηση Ψ η οποία προκύπτει ως λύση της εξίσωσης του Schrödinger, είναι εν γένει μια **μιγαδική** συνάρτηση.

Δ. Αντιμεταθέτης $[\hat{A},\hat{B}]$, δυο τελεστών ονομάζεται ο τελεστής $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ δηλαδή $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Όταν $[\hat{A},\hat{B}]=0$ τότε λέμε ότι οι δυο τελεστές αντιμετατίθενται.

<u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ:</u>

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δυο γραμμικοί τελεστές να έχουν ένα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων κοινό , είναι να αντιμετατίθενται.

Ε. Η κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r},t)$ (τροχιακό), δεν έχει από μόνη της κάποια φυσική σημασία. Απλώς αν $\Psi(\vec{r},t)=0$ δεν υπάρχει σωματίδιο ενώ αν $\Psi(\vec{r},t)\neq 0$ σίγουρα υπάρχει σωματίδιο.
Αυτό όμως που έχει σημασία είναι η $|\Psi(\vec{r},t)|^2=\Psi(\vec{r},t)^*\,\Psi(\vec{r},t)$, η οποία εκφράζει την **πυκνότητα πιθανότητας** να βρεθεί το σωματίδιο σε κάποια περιοχή του χώρου.
Επειδή όμως εφόσον $\Psi(\vec{r},t)\neq 0$ σίγουρα υπάρχει σωματίδιο στην περιοχή του χώρου όγκου V, με ενέργεια Ε, δηλαδή η πιθανότητα είναι p=1 θα έχουμε και $p=\int_V \Psi^*\Psi\, dV=1$.

25) Για τον αντιμεταθέτη $[\hat{x},\hat{p}_x]$ ισχύει:
α) $[\hat{x},\hat{p}_x]=0$
β) $[\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar$
γ) $[\hat{x},\hat{p}_x]=1$
δ) $[\hat{x},\hat{p}_x]$ δεν ορίζεται.

Απάντηση:

Θεωρώντας τη συνάρτηση Ψ(x) θα έχουμε $[\hat{x},\hat{p}_x]\Psi(x)=\hat{x}\,\hat{p}_x\,\Psi(x)-\hat{p}_x\,\hat{x}\Psi(x)$. Όμως $\hat{x}=x$ και $\hat{p}_x=-i\hbar\frac{d}{dx}$, άρα θα έχουμε $[\hat{x},\hat{p}_x]\Psi(x)=-xi\hbar\frac{d\Psi}{dx}+i\hbar\frac{d(x\Psi)}{dx}=$
$=-i\hbar x\frac{d\Psi}{dx}+i\hbar x\frac{d\Psi}{dx}+i\hbar\Psi=i\hbar\Psi \Rightarrow [\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar$.

§7.8 Πηγάδια Δυναμικού

Είπαμε πως η διαφορική εξίσωση του Schrödinger για ένα σωματίδιο που:
α) κινείται πάνω στον άξονα των x
β) σε μια περιοχή όπου υπάρχει ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων και
γ) για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (χρονοανεξάρτητη εξίσωση)
έχει τη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + U_{(x)}\cdot\Psi_{(x)} = E\cdot\Psi_{(x)} \qquad (1)$$

η λύση της εξίσωσης αυτής είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου .

Εξάλλου από τη συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε $\sum_{o}^{L} |\Psi|^2 .d\,x = 1$ δηλαδή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου , πάνω στον άξονα των x και στο διάστημα από 0 έως L.

Α) Πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους

Είναι το κουτί που είπαμε και στην προηγούμενη παράγραφο .
Χαρακτηριστική περίπτωση είναι ο πυρήνας των ατόμων και η κίνηση των ηλεκτρονίων σ΄ένα μέταλλο.

Σ' ένα τέτοιο πηγάδι δυναμικού είναι
$U = 0$ για $0 \le x \le L$ και
$U = \infty$ για $x < 0$ και $x > L$.
Τότε η λύση της εξίσωσης (1) για τις κυματοσυναρτήσεις του σωματίου είναι :
$\Psi_n(x) = 0$ για $x < 0$ και $x > L$ και
$\Psi_n(x) = A$ ημ $\frac{n\pi x}{L}$ για $0 \le x \le L$ με $n = 1,2,3 \ldots$ με ορμή $\rho = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L}$ αφού $L = n\cdot\frac{\lambda}{2}$ και ενέργεια Ε του ηλεκτρονίου, η οποία είναι ίση μόνο με την κινητική του ενέργεια, άρα $K = E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \Rightarrow$

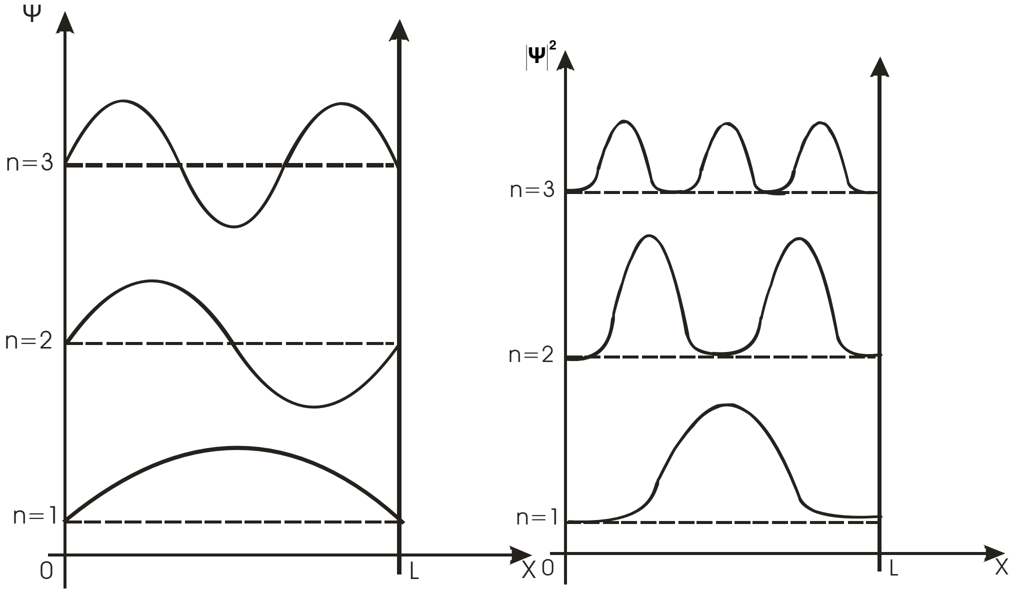
$$\Rightarrow E = \frac{n^2 4\pi^2\hbar^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = n^2\cdot E_1.$$

Απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η ολική ενέργεια είναι κβαντισμένη και **διάφορη του μηδενός** ($n \neq 0$), παντού μέσα στο κουτί .

Ακόμη παρατηρούμε ότι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δυο ενεργειακών σταθμών αυξάνεται καθώς αυξάνεται το n και τέλος

Όσο μικρότερο είναι το πλάτος L του πηγαδιού τόσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια των ενεργειακών καταστάσεων. Σε αυτό το μικρό πλάτος του πυρήνα των ατόμων οφείλεται και η μεγάλη ενέργεια των νουκλεονίων του.

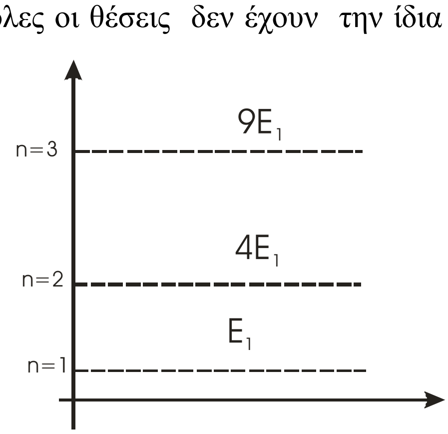
Ακόμη αφού Ψ_n (x) = 0 για x < 0 και x > L τότε και $|\Psi|^2$=0 δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο έξω από το κουτί είναι μηδέν .
Δηλαδή το μονοδιάστατο φρέαρ (κουτί), ανακλά πλήρως το σωμάτιο, το οποίο κινείται μόνο μεταξύ 0 και L.
Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κυματοσυνάρτησης **Ψ(x)** για τους τρεις πρώτους κβαντικούς αριθμούς, καθώς και οι αντίστοιχες πιθανότητες $|\Psi(x)|^2$.



- Παρατηρείστε από τις γραφικές παραστάσεις ότι η κυματοσυνάρτηση Ψ_n (x) είναι μηδέν παντού έξω από το κουτί καθώς και για x = 0 και x = L , Ψ_n (x) = 0.

(για x=0 έχουμε $\Psi_n(0) = A$ ημ $\frac{n\pi 0}{L}$ =A·ημ0=0)

- Ακόμη η πιθανότητα $|\Psi|^2$ να βρίσκεται το σωμάτιο (π.χ e^-), έξω από το πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους είναι μηδέν δηλ $|\Psi|^2 = 0$ για x < 0 και x> L ενώ ακόμη η $|\Psi|^2$ είναι και ανεξάρτητη του χρόνου . Επίσης παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση $|\Psi|^2$ (x) ότι όλες οι θέσεις δεν έχουν την ίδια πιθανότητα για να βρεθεί το σωμάτιο στο διάστημα $0 \le x \le L$.
- Τέλος το πλήθος των ενεργειακών σταθμών είναι άπειρο n = 1 . . . ∞ και η απόσταση ανάμεσα σε δυο ενεργειακές στάθμες δεν είναι σταθερή , αλλά μεγαλώνει όσο αυξάνει , η τιμή του n , σε αντίθεση με το άτομο του H, όπου η απόσταση δυο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών ελαττώνεται με την αύξηση του n.



Δηλαδή ένα τετραγωνικό πηγάδι με άπειρο βάθος έχει και άπειρες τιμές για το n δηλαδή άπειρο αριθμό δέσμιων καταστάσεων κάτι που δεν ισχύει για πηγάδι πεπερασμένου βάθους .

Β) Πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους ή αλλιώς δυναμικό τετραγωνικού πηγαδιού .

Σ' ένα τέτοιο πηγάδι η συνάρτηση δυναμικού U(x) (στην πραγματικότητα συνάρτηση δυναμικής ενέργειας), που παρουσιάζεται στην εξίσωση του Schrödinger είναι

$U(x) = 0$ για $0 \le x \le L$ και

$U = U_o$ για $x < 0$ και $x > L$

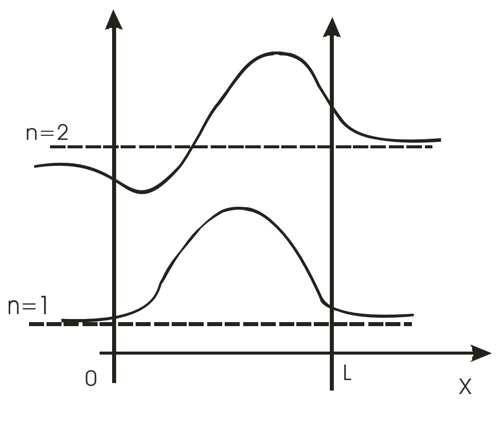
Τότε αποδεικνύεται ότι η λύση της εξίσωσης του Schrödinger μας δίνει

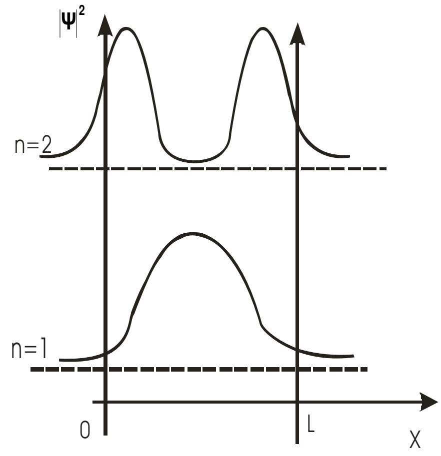
$$\Psi_n(x) = C_1\, \eta\mu\, \frac{n\pi x}{L} + C_2\, \sigma\upsilon\nu\, \frac{n\pi x}{L} \quad \text{για } 0 \le x \le L \quad \text{και}$$

$$\Psi_n(x) = D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx} \quad \text{για } x < 0 \text{ και } x > L$$

Δηλαδή και έξω από το πηγάδι **δεν** είναι Ψ (x) = 0 αλλά υπάρχει η πιθανότητα το σωματίδιο να είναι και έξω από το πηγάδι δυναμικού ακόμη και αν δεν έχει την απαιτούμενη ενέργεια (φαινόμενο σήραγγας) . Η πιθανότητα αυτή αυξάνεται όσο το e^- βρίσκεται σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη (μεγαλύτερη τιμή για το n).

- Έτσι σ' ένα πηγάδι πεπερασμένου βάθους οι κυματοσυναρτήσεις των δέσμιων καταστάσεων είναι **ημιτονοειδείς** μέσα στο πηγάδι και **εκθετικές** έξω απ΄ αυτό , και πλησιάζουν εκθετικά την τιμή Ψ = 0 για μεγάλα $|x|$. Έτσι στη γραφική παράσταση της $\Psi_{(x)}$ εμφανίζονται τα εκθετικά τμήματα σαν ουρές που εκτείνονται έξω από το πηγάδι όπου σύμφωνα με τη Νευτώνεια μηχανική **δεν** θα' έπρεπε να βρίσκεται το σωμάτιο γιατί θα έχει αρνητική κινητική ενέργεια .





✓ Για n = 1 το σωματίδιο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται στο μέσο της απόστασης (0 – L), παρά στα άκρα της. Μόνο για μεγάλες τιμές του κύριου κβαντικού αριθμού n, δηλαδή για υψηλές ενεργειακές στάθμες η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο σε κάποια θέση της παγίδας (0-L) κατανέμεται πιο ομοιόμορφα και συγκλίνει στην άποψη της κλασικής θεωρίας που θεωρεί όλες τιςθέσεις ισοπίθανες.

✓ Και η συνάρτηση Ψ (x) και η πρώτη παραγωγός της είναι συνεχείς στα οριακά σημεία x = 0 και x = L . Αλλιώς η δεύτερη παραγωγός $\frac{d^2\psi}{dx^2}$(x) θα απειρίζονταν στα σημεία αυτά ενώ πρέπει να είναι ανάλογη της διαφοράς U_o – E , ($\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U_o - E)}{h^2} \cdot \Psi$).

✓ Παρατηρούμε ότι και η $|\Psi|^2$ δεν μηδενίζεται απότομα έξω από το πηγάδι αλλά ελαττώνεται **εκθετικά** (ημιπερατά τοιχώματα) και ακόμη όπως και στο πηγάδι απείρου βάθους **δεν** έχουν όλες οι θέσεις την ίδια πιθανότητα.

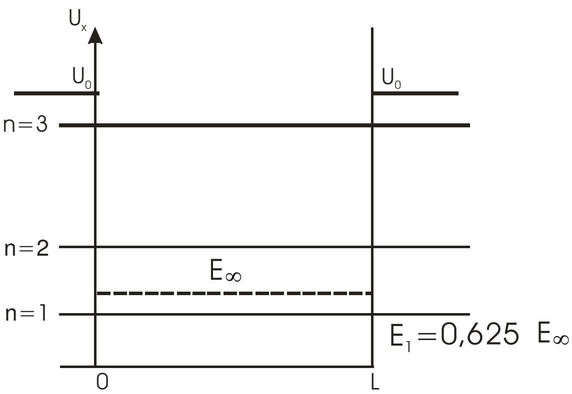
Δηλαδή το ηλεκτρόνιο μπορεί να διαφύγει από την παγίδα του και να βρεθεί έξω από το πηγάδι ακόμη και αν δεν έχει θεωρητικά την απαιτούμενη ενέργεια. Είναι σαν να κλείνουμε ένα μπαλάκι σε ένα κουτί και αυτό να βρίσκεται έξω από αυτό, (φαινόμενο σήραγγας).

Πάντως η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο έξω από το πηγάδι μεγαλώνει όσο το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη .

Έστω ακόμη ότι E_∞ είναι η ενέργεια της θεμελιώδης στάθμης (n = 1) όταν το πηγάδι έχει άπειρο βάθος και $E_1 = 0{,}625\ E_\infty$ είναι η θεμελιώδης στάθμη όταν το πηγάδι έχει πεπερασμένο βάθος. Παρατηρούμε ότι για πηγάδι πεπερασμένου δυναμικού η ενέργεια της θεμελιώδης στάθμης είναι **λίγο μικρότερη** από την E_∞ . Αυτό ισχύει και για όλες τις υπόλοιπες ενεργειακές στάθμες. Έτσι και το μήκος κύματος λ του σωματίου μέσα στο πεπερασμένο πηγάδι θα είναι **λίγο μεγαλύτερο** απ΄ αυτό που θα είχε σε πηγάδι απείρου βάθους . Δηάδή το πεπερασμένο βάθος του πηγαδιού χαμηλώνει τις ενεργειακές στάθμες σε σύγκριση με τις τιμές για πηγάδι με άπειρο βάθος.

Επίσης το πηγάδι με πεπερασμένο βάθος U_o έχει **πεπερασμένο αριθμό δέσμιων καταστάσεων** και άρα ενεργειακών καταστάσεων και όχι άπειρο όπως έχει το πηγάδι με άπειρο βάθος .

Το πλήθος των ενεργειακών καταστάσεων εξαρτάται από το δυναμικό U_o . Έτσι όταν:



α) η U_o είναι πολύ μεγαλύτερη από την E_∞ (πολύ βαθύ πηγάδι) υπάρχουν πολλές ενεργειακές στάθμες .

β) η U_o είναι μερικές φορές μεγαλύτερη της E_∞ π.χ $U_o = 6\ E_\infty$ υπάρχουν λίγες δέσμιες καταστάσεις (εδώ 3) .

γ) Όμως υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον **μια** δέσμια κατάσταση ακόμη και όταν η U_o είναι μικρότερη της E_∞ , τότε έχουμε ακριβώς μια δέσμια κατάσταση και

δ) όταν η U_o είναι πολύ μικρότερη της E_∞ τότε η ενέργεια της μιας και μοναδικής δέσμιας κατάστασης είναι $E = 0{,}68\ U_o$.

ε) Όταν η ενέργεια της κατάστασης Ε είναι μεγαλύτερη από το ύψος του δυναμικού U_o , τότε το σωματίδιο **δεν** είναι δέσμιο , αλλά ελεύθερο και κινείται

κατά μήκος όλου του άξονα xx΄ και όχι μόνο στο διάστημα $0 \le x \le L$, μάλιστα τότε η ενέργεια του **δεν είναι κβαντισμένη** και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή , (συνεχές ενεργειακό φάσμα) .
Για ένα ελεύθερο σωματίδιο οι κυματοσυναρτήσεις του είναι ημιτονοειδείς και μέσα και έξω από το πηγάδι .
Όμως **μέσα** στο πηγάδι το κινούμενο σωματίδιο έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια απ' ότι έξω, άρα **μέσα** στο πηγάδι έχει και μικρότερο μήκος κύματος λ .

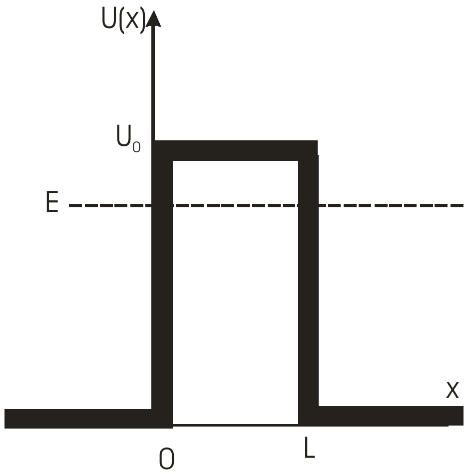
στ) Τέλος μέσα στο πηγάδι είπαμε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι κβαντισμένη όμως απαγορεύεται να πάρει την τιμή μηδέν ($n \neq 0$)
Άρα μέσα στο πηγάδι το σωματίδιο **δεν** ηρεμεί .

Απόδειξη: Αν K=E=0, τότε αυτό σημαίνει πως $\frac{p^2}{2m}=0$, άρα και p=0. Τότε όμως η ορμή του σωματίου είναι πλήρως καθορισμένη και άρα η αβεβαιότητα ως προς την ορμή είναι Δp=0. Σύμφωνα όμως τότε και με την αρχή της αβεβαιότητας θα είναι $\Delta x=\infty$. Όμως η αβεβαιότητα ως προς τη θέση είναι όση και το εύρος του πηγαδιού δηλαδή Δx=L. Έτσι λοιπόν το προηγούμενο συμπέρασμα είναι άτοπο και άρα θα έχουμε $E\neq 0$.

§7.9 Φαινόμενο σήραγγας

Ανάλογα με τα πηγάδια δυναμικού έχουμε και τα φράγματα δυναμικού.

Εδώ ένα ηλεκτρόνιο έχει μικρότερη ενέργεια (E), από την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια (U_0), ενός ηλεκτρικού πεδίου (φράγμα δυναμικού).
Μια σχηματική παράσταση ενός φράγματος δυναμικού είναι η παρακάτω



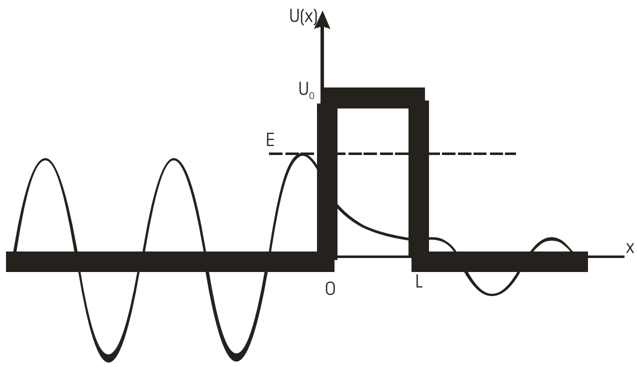
Ενώ τότε σύμφωνα με την κλασική Φυσική θα έπρεπε το ηλεκτρόνιο που έρχεται αντιμέτωπο με ένα τέτοιο φράγμα δυναμικού, να ανακλαστεί και να επιστρέψει προς τα πίσω, σύμφωνα με την κβαντική θεωρία είναι δυνατόν μερικές φορές το ηλεκτρόνιο να διέλθει του φράγματος.
Σαν να υπάρχει μια σήραγγα μέσα από το φράγμα δυναμικού και είναι δυνατό το ηλεκτρόνιο να διαπεράσει το εμπόδιο και να βρεθεί από την άλλη πλευρά , χωρίς να έχει απαραίτητα την ενέργεια που θα χρειαζόταν για να υπερπηδήσει το εμπόδιο .

Οι περιορισμοί που επιβάλλονται από το φράγμα δυναμικού είναι
U=0 για x<0 και x>L και
$U=U_0$ για $0 \leq x \leq L$.

Τότε από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης του Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\cdot\Psi(x) = E\cdot\Psi(x),$$

προκύπτει ότι δεξιά και αριστερά του φράγματος δηλαδή για **x < 0 και x > L** και για την περίπτωση που η ενέργεια E του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη της U_0 ότι οι λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger και άρα η κυματοσυνάρτηση είναι **ημιτονοειδής**, ενώ μέσα στο φράγμα η λύση έχει **εκθετική μορφή**, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η συνάρτηση είναι εκθετική μέσα στο φράγμα $0 \leq x \leq L$ και ημιτονοειδής έξω από το φράγμα .

- Επίσης στα σημεία x = 0 και x = L η συνάρτηση Ψ_n (x) και η πρώτη παραγωγός της είναι συνεχής .
- Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση δεν είναι μηδέν μέσα στο φράγμα αλλά υπάρχει πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο όχι μόνο μέσα στο φράγμα αλλά και δεξιά απ' αυτό .

Από τι εξαρτάται η πιθανότητα να διέλθει ένα σωματίδιο μέσα από το φράγμα ;
Η πιθανότητα εξαρτάται από το **πλάτος L** του φράγματος και από το **ύψος U_0** του φράγματος σε σύγκριση με την κινητική ενέργεια E του σωματιδίου (E = $\frac{p^2}{2m}$).
Η πιθανότητα να διέλθει το κινούμενο σωματίδιο μέσα από το φράγμα δυναμικού, ονομάζεται συντελεστής διέλευσης T και είναι ανάλογος του τετραγώνου του λόγου των πλατών των ημιτονικών συναρτήσεων δεξιά και αριστερά του φράγματος . Αποδεικνύεται ότι :

$T = Ae^{-2KL}$ όπου $A = 16\,\frac{E}{U_o}(1 - \frac{E}{U_o})$ και $K = \frac{\sqrt{2m(U_o - E)}}{\hbar}$.

Πάντως όσο πιο **μεγάλο** είναι το πλάτος L του φράγματος τόσο **μικρότερη** είναι η πιθανότητα διέλευσης του σωματιδίου μέσα απ' αυτό. Εξαρτάται επίσης από τη διαφορά ενέργειας **U_o – E .**

§7.10 Κβαντικός Αρμονικός ταλαντωτής

Υπάρχει όμως περίπτωση η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας,U (x) της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger
$-\frac{h^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x) = E\,.\,\Psi(x)$ να είναι της μορφής $U(x) = \frac{1}{2}K\,x^2$. Τότε η εξίσωση του Schrödinger παίρνει τη μορφή:

$$-\frac{h^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}K\,x^2\cdot\Psi = E\cdot\Psi$$

Και τότε η παραπάνω εξίσωση έχει λύση $\mathbf{\Psi\ (x)\ =\ }Ce^{-\sqrt{mK}x^2/2\hbar}$ όπου η C είναι η σταθερά κανονικοποίησης και προκύπτει από τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\, \mathbf{dx\ =1}$.

Η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης του αρμονικού ταλαντωτή αποδεικνύεται ότι είναι $E_o = \frac{1}{2}h\,f = \frac{1}{2}\,h\,\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow E_o = \frac{1}{2}\hbar\,\omega$ επειδή $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ άρα $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}$ άρα και $E_o = \frac{1}{2}\,\hbar\sqrt{\frac{K}{m}}$.

Απόδειξη:

Η ενέργεια του ταλαντωτή γράφεται $E=K+U=\frac{\Delta p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\Delta x^2$ ή

$E=(\frac{\Delta p}{\sqrt{2m}})^2 + (\frac{\sqrt{m}.\omega.\Delta x}{\sqrt{2}})^2 \geq 2\cdot(\frac{\Delta p}{\sqrt{2m}})\cdot(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\cdot\omega\cdot\Delta x)$ αφού $\alpha^2+\beta^2\geq 2\cdot\alpha\cdot\beta$. Τότε έχουμε και $E\geq\omega\cdot\Delta p\cdot\Delta x$. Επειδή όμως και $\Delta p\cdot\Delta x\geq\frac{\hbar}{2}$, προκύπτει τελικά $E\geq\frac{\hbar}{2}\omega$. Άρα $E_{min}=\frac{1}{2}\cdot\hbar\cdot\omega=\frac{1}{2}\cdot h\cdot f$.

Τότε για τις υπόλοιπες στάθμες αποδεικνύεται ότι είναι

$En = (\,n + \frac{1}{2}\,)\,\hbar\,\omega = (\,n + \frac{1}{2}\,)\,\hbar\,\sqrt{\frac{K}{m}} =(\,n + \frac{1}{2}\,)\,h.f$ (n = 0,1,2,3 . . .).

Δηλαδή οι ενεργειακές στάθμες είναι περιττά ημιπολλαπλάσια

$(\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,,\,\frac{5}{2}\,.\,.\,.\,)$ της ποσότητας ħ . ω

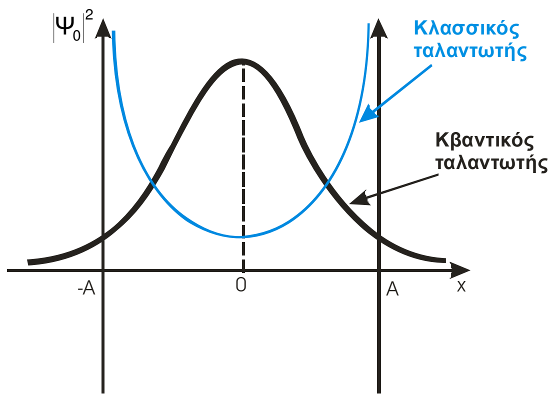
Προσέξτε:

Α) Ότι στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή η μικρότερη επιτρεπόμενη ενέργεια δεν είναι $E_0=0$ αλλά $E_0=\frac{1}{2}\,h.f=\frac{1}{2}\,\hbar.\omega$

Β) Ακόμη οι αποστάσεις μεταξύ δυο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι σταθερές $\Delta E=h.f$, ενώ στο άτομο του Η ελαττώνονται και για σωμάτιο σε κουτί αυξάνονται.

Αυτό ισχύει γιατί στον αρμονικό ταλαντωτή έχουμε $En = (\,n + \frac{1}{2}\,)\,h.f$ n=0,1,2,… στο άτομο του Η έχουμε $En=\frac{E_1}{n^2}$ n=1,2,3,…. και για σωμάτιο σε κουτί έχουμε $En=n^2.E_1$ n=1,2,3,….

Γ) Ακόμη στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή η $|\Psi|^2$ δεν μηδενίζεται απότομα έξω από τα όρια -Α, Α αλλά ελαττώνεται εκθετικά (εκθετικές ουρές) όπως στο πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους.
Έτσι για n=0 είναι
$E_0=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega=\frac{1}{2}\hbar.\omega$ και έχουμε το διπλανό σχήμα:



Παρατηρείστε ότι για τον **κλασικό** αρμονικό ταλαντωτή και για n=0, η πιθανότητα είναι μέγιστη να βρεθεί το σωμάτιο στα ακραία σημεία (-Α,Α) της κίνησης γιατί εκεί το σωμάτιο κινείται αργά, ενώ έχει ελάχιστη πιθανότητα να βρεθεί στη θέση x=0. Αντίθετα για τον **κβαντικό** αρμονικό ταλαντωτή το σωμάτιο έχει μέγιστη πιθανότητα να βρεθεί στη θέση x=0, δηλαδή στο μέσο της απόστασης -ΑΑ. Για μεγάλες όμως τιμές του n, ο κβαντικός ταλαντωτής τείνει να συμπεριφέρεται όπως και ο κλασικός.

26) Ένα σώμα μάζας m=1 Kg πραγματοποιεί γραμμική αρμονική ταλάντωση πλάτους $A=\sqrt{\pi}$ cm,δεμένο σε ελατήριο σταθεράς K= 100 N/m. Τότε αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή τότε ο κβαντικός αριθμός (n), της στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής είναι:
α) n=π
β) $n=10^{33}/66$
γ) $n\to 0$
δ) $n=K\cdot A^2/2m$.

Απάντηση:

Η περίοδος T του ταλαντωτή είναι $T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}=\frac{\pi}{5}$ s. Τότε επειδή οι αποστάσεις μεταξύ δυο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι σταθερές $\Delta E=h.f=6{,}6\cdot 10^{-34}\cdot\frac{5}{\pi}=\frac{33.10^{-34}}{\pi}$ J. Η ολική ενέργεια του κβαντικού τακαντωτή μας είναι $E_n=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2=\frac{\pi}{200}$ J.

Ακόμη έχουμε $E_n=(n+\frac{1}{2})\,h.f=n'\cdot\Delta E$ ή $n'=\frac{E_n}{\Delta E}=\frac{\pi/200}{33.10^{-33}}=\frac{10^{33}}{66}$ J.