Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος

Α. Πηγές φωτός

Οι πιο κοινές πηγές φωτός είναι

α) Θερμαινόμενα στερεά, π.χ. νήμα από W(βολφράμιο) λυχνίας πυρακτώσεως.

β) Αέρια με τη βοήθεια ηλεκτρικής εκκένωσης, π.χ. λυχνία με Ne(Νέον).

γ) Φωτοδίοδοι (Light Emitting Diodes - LED), που αποτελούνται από ημιαγωγούς Ga, As, In κ.λ.π.

Το εκπεμπόμενο φως το αναλύουμε με ένα φασματόμετρο μετρώντας την **φασματική αφετική ικανότητα I_λ**, δηλαδή την ένταση της ακτινοβολίας ανά μονάδα μήκους κύματος. Η μονάδα μέτρησης της I_λ στο S.I. είναι το $1\frac{W}{m^2}/m$.

Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση $I_\lambda \to \lambda$, το εμβαδό $I=\int_0^\infty I_\lambda \cdot d\lambda$ κάτω από αυτήν, εκφράζει την **ένταση** της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας και λέγεται **αφετική ικανότητα**. Η μονάδα μέτρησης της I στο S.I. είναι το $1\frac{W}{m^2}$.

Εδώ θα ασχοληθούμε με θερμαινόμενα στερεά. Επειδή το υλικό της φωτεινής πηγής επηρεάζει τα αποτελέσματα των μετρήσεων, μελετάμε ένα ιδανικό θερμαινόμενο στερεό, το οποίο λέγεται **ακτινοβολούσα κοιλότητα** ή **μέλαν σώμα**. Το μέλαν σώμα (black body) θεωρούμε ότι απορροφά όλα τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό. Επίσης εκπέμπει ένα συνεχές φάσμα σε όλα τα μήκη κύματος, που ονομάζεται ακτινοβολία μέλανος σώματος (black body radiation).

Δεν υπάρχει μέλαν σώμα στην πραγματικότητα, αλλά η χρήση ιδανικών μοντέλων, δε μας είναι άγνωστη στη Φυσική, όπως και τα χρήσιμα συμπεράσματα, που προκύπτουν από αυτά. Το ίδιο κάναμε και στη Θερμοδυναμική, όταν χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο του ιδανικού αερίου, αντί για τα πραγματικά αέρια, στη Μηχανική όταν λέμε «λείο δάπεδο» ή «αβαρές νήμα».

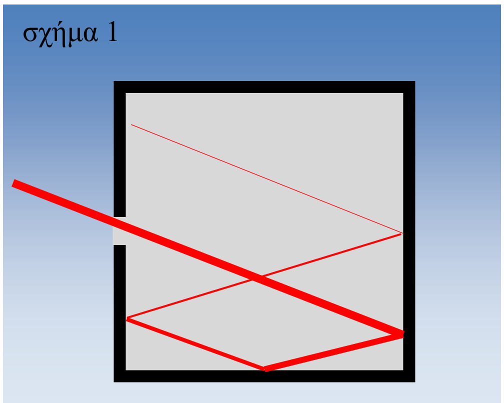
Το φως που εκπέμπει το μέλαν σώμα, σε όλα τα μήκη κύματος, είναι ανεξάρτητο του υλικού της κοιλότητας και μεταβάλλεται με απλό τρόπο ως προς τη θερμοκρασία.

Τι χρώμα έχει το μέλαν σώμα; Μαύρο θα απαντούσε κάποιος βιαστικά.

Και θα έκανε μέγα λάθος, αφού θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, ότι μπορεί να έχει **οποιοδήποτε χρώμα**! Το χρώμα που βλέπουμε εξαρτάται από τα μήκη κύματος που εκπέμπει ένα σώμα, όχι από αυτά που απορροφά και επίσης από την ανιχνευτική διάταξη που θα χρησιμοποιήσουμε. Αν ένα σώμα εκπέμπει στο υπέρυθρο μόνο για το ανθρώπινο μάτι θα φαίνεται μαύρο. Οι κάμερες του James Webb Space Telescope, μας αποκαλύπτουν όμως τα μυστικά του σύμπαντος στο υπέρυθρο…

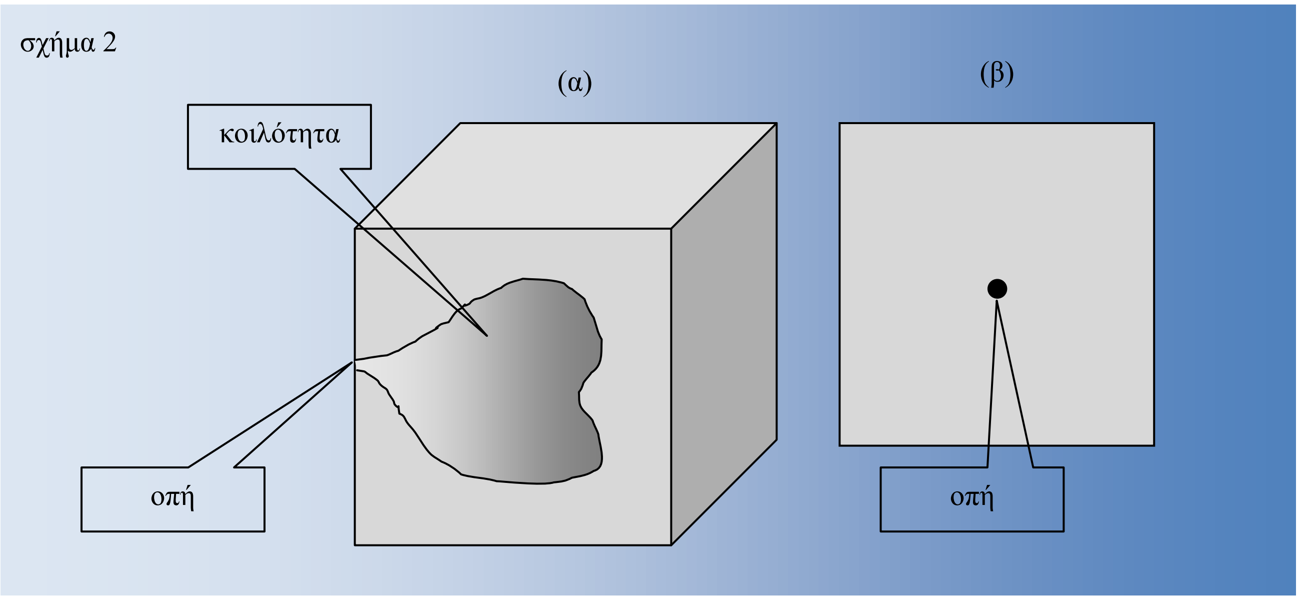
Β. Ακτινοβολούσα κοιλότητα

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το μέλαν σώμα θεωρώντας ένα κοίλο κουτί με μικρό άνοιγμα σε κάποια έδρα. Το φως που εισέρχεται από το άνοιγμα αλληλεπιδρά με τα σωματίδια του υλικού του κουτιού (σχήμα 1).

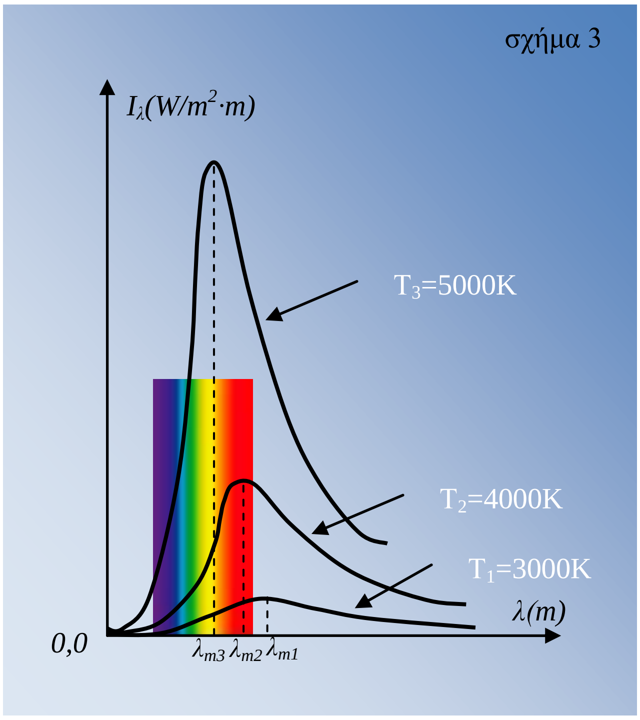


Όταν ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας από τα τοιχώματα είναι ίσος με τον ρυθμό εκπομπής, τότε έχει επιτευχθεί θερμική ισορροπία. Ανοίγοντας μια οπή στην κοιλότητα, μικρή ως προς τις διαστάσεις της κοιλότητας, τότε η ακτινοβολία «ισορροπίας» που διαφεύγει δεν επηρεάζει την ισορροπία και για έναν παρατηρητή η μικρή οπή εμφανίζεται ως επιφάνεια ενός μέλανος σώματος. Μια τέτοια επιφάνεια μπορεί να απορροφά και να εκπέμπει όλα τα μήκη κύματος του φάσματος (συνεχές φάσμα) της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Για τον λόγο αυτό η ακτινοβολία που εξέρχεται από την κοιλότητα ονομάζεται **ακτινοβολία μέλανος σώματος**

Η κοιλότητα μπορεί να έχει οποιοδήποτε σχήμα. Ας θεωρήσουμε έναν κύβο π.χ. από βολφράμιο, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει κοιλότητα, που επικοινωνεί με μικρή οπή με το εξωτερικό περιβάλλον (σχήμα 2α). Μελετάμε την αφετική ικανότητα σε διάφορες θερμοκρασίες, έστω *3000K, 4000K, 5000K*.



Προκύπτουν τότε τα ποιοτικά διαγράμματα του σχήματος 3.



α) Βλέπουμε ότι το φάσμα είναι συνεχές, δηλαδή τα εκπεμπόμενα μήκη κύματος είναι από $0 \rightarrow \infty$. Οι καμπύλες αυτές είναι ανεξάρτητες του υλικού, σχήματος και μεγέθους της κοιλότητας και εξαρτώνται μόνο από τη θερμοκρασία. Η χρωματιστή ταινία είναι η περιοχή μηκών κύματος του ορατού από τον άνθρωπο φωτός. Παρατηρούμε ότι ένα μέρος μόνο της ενέργειας της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας βρίσκεται στην ορατή περιοχή.

β) Η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας (το εμβαδό δηλαδή κάτω από την καμπύλη), μέχρι το έτος 1900, είχε μελετηθεί εκτενώς και είχε βρεθεί:

$$\boxed{I = \sigma \cdot T^4}$$ (Νόμος Josef Stefan - Ludwig Boltzmann)

όπου
$\sigma = 5{,}67037442 \cdot 10^{-8}\ W / m^2 \cdot K^4$ η σταθερά Stefan - Boltzmann και
T η απόλυτη θερμοκρασία του σώματος.

γ) Η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας δεν κατανέμεται ομοιόμορφα στα διάφορα μήκη κύματος. Αύξηση της θερμοκρασίας, οδηγεί σε αύξηση του μέγιστου της I_λ, ενώ το αντίστοιχο μήκος κύματος λ_m μειώνεται.

Η μετατόπιση αυτή στο λ_m περιγράφεται από το νόμο μετατόπισης του Wilhelm Wien

$$\boxed{\lambda_m \cdot T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\, K \cdot m}$$

✷ **<u>Ερώτηση 1</u>**

Η θερμοκρασία του κουτιού και της κοιλότητας του σχήματος 2 είναι $T = 300K$.

i) Η οπή του σχήματος 2β, έχει για έναν άνθρωπο παρατηρητή χρώμα μαύρο. Τι εξήγηση δίνετε;

ii) Αν διαθέτουμε μια κάμερα υπερύθρων, σκεφτείτε ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι σωστό για τη λαμπρότητα του κουτιού και της οπής:

α) Το κουτί και η οπή θα είχαν την ίδια λαμπρότητα.

β) Το κουτί θα λάμπει περισσότερο από την οπή.

γ) Η οπή θα λάμπει περισσότερο από το κουτί.

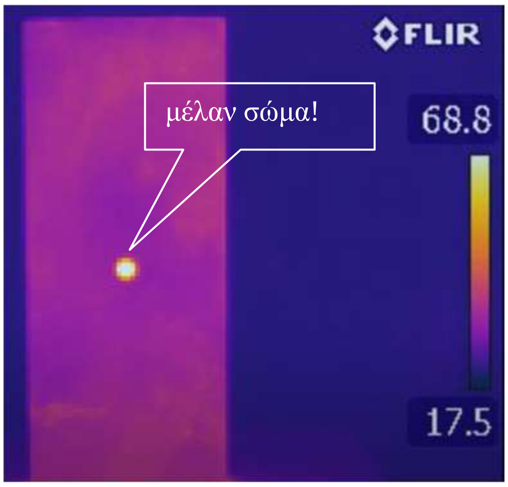
Απάντηση

i) Από το νόμο Wien $\lambda_m = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{2}} = 0,967 \cdot 10^{-5} = 9670nm$

δηλαδή «πολύ μέσα» στο υπέρυθρο… Άρα στο μάτι του παρατηρητή η οπή - το μέλαν σώμα - θα φαίνεται **μαύρη**.

ii) Η κάμερα υπερύθρων θα ανιχνεύσει υπέρυθρη ακτινοβολία και από την οπή και από το κουτί. Η αφετική ικανότητα όμως της οπής ως μέλαν σώμα είναι μεγαλύτερη άρα θα φαίνεται λαμπρότερη από το κουτί. **Σωστή απάντηση → γ**

Και για του λόγου το αληθές, φωτογραφία από το video: [Black Body Radiation]



✸ Ερώτηση 2

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα της Ερώτησης 1, αλλά χρησιμοποιούμε δύο όμοια σε διαστάσεις κουτιά από διαφορετικό υλικό. Ποια νομίζετε ότι θα είναι σωστή πρόταση;

α) Τα δυο κουτιά και η οπή θα έχουν την ίδια λαμπρότητα με αυτήν της ερώτησης 1.

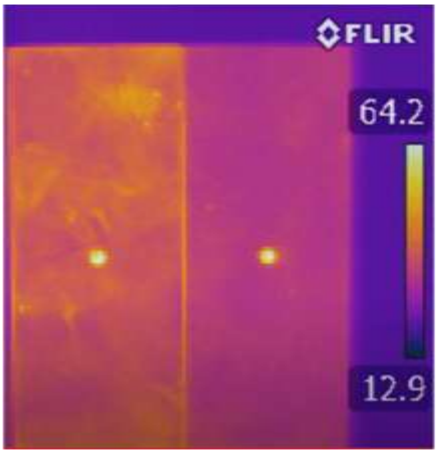
β) Τα δυο κουτιά θα έχουν διαφορετική λαμπρότητα μεταξύ τους αλλά η οπή την ίδια με αυτήν της ερώτησης 1.

Απάντηση

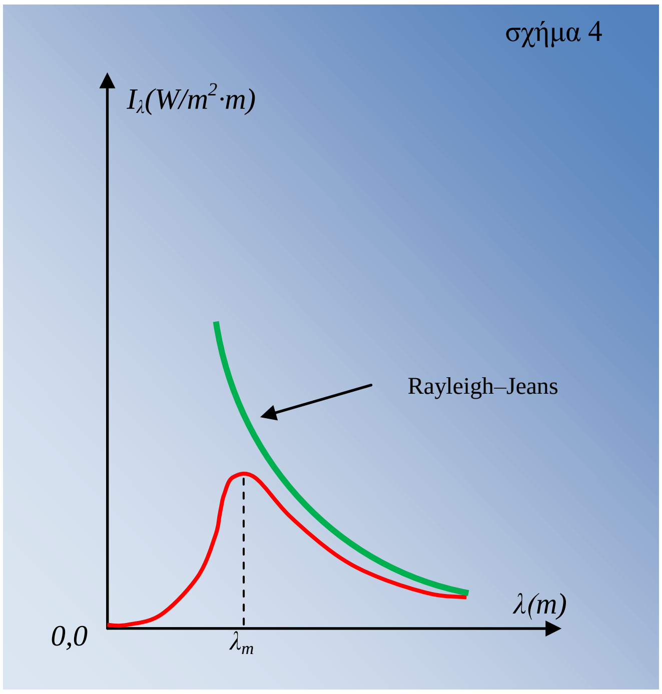
Η αφετική ικανότητα του μέλανος σώματος δεν εξαρτάται από το υλικό του. Άρα η οπή θα έχει την ίδια λαμπρότητα και στα δύο πειράματα, ενώ τα κουτιά θα εμφανίζουν διαφορετική και όπως είδαμε και πριν μικρότερη από την λαμπρότητα της οπής.

Σωστή απάντηση → β

Δείτε και την απόδειξη…



Γ. Η Θεωρητική εξήγηση



σχήμα 4

Θεωρώντας την ακτινοβολία του μέλανος σώματος, να εκπέμπεται ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα, οι Rayleigh–Jeans, υπολόγισαν την φασματική αφετική ικανότητα

$$\boxed{I_\lambda = \frac{2\pi ck}{\lambda^4}T}$$

Αυτή όμως η σχέση προσεγγίζει τις πειραματικές καμπύλες του σχηματος 3, μόνο σε πολύ μεγάλα μήκη κύματος, ενώ για $\lambda \to 0$ δίνει $I_\lambda \to \infty$.

Δηλαδή στα πολύ μικρά μήκη κύματος το μέλαν σώμα θα εκπέμπει άπειρη ισχύ! (σχήμα 4)

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάστηκε **«η καταστροφή του υπεριώδους»**

Στις 19 Οκτωβρίου του 1900 ο Planck ανακοίνωσε στη Φυσική εταιρεία του Βερολίνου, τον **εμπειρικό τύπο**, που εξηγεί με μεγάλη ακρίβεια τις καμπύλες αυτές.

$$\boxed{I_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{c_2/\lambda T}-1}} \quad (1)$$

Στη συνέχεια αναζήτησε τη θεωρητική εξήγηση και στις 14 Δεκεμβρίου του 1900, ανέπτυξε στη Φυσική εταιρεία του Βερολίνου, τη θεωρία που γέννησε την **Κβαντική Φυσική**.

Θεώρησε ότι τα άτομα του υλικού της κοιλότητας συμπεριφέρονται ως μικροσκοπικοί ηλεκτρομαγνητικοί ταλαντωτές απορροφώντας ή αποβάλλοντας ενέργεια και έκανε δυο ριζοσπαστικές υποθέσεις.

1η Υπόθεση

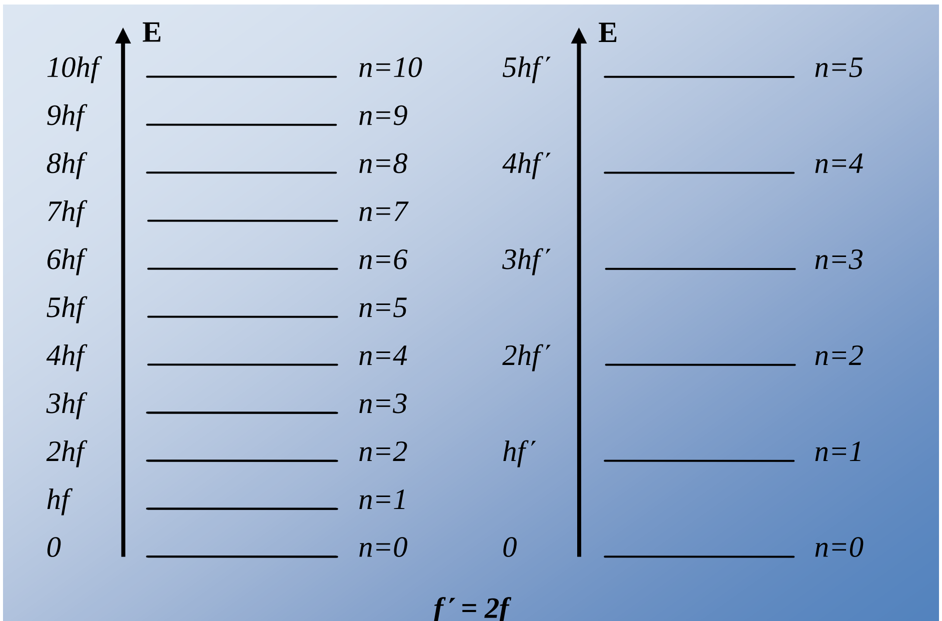
Η ενέργεια ενός ταλαντωτή δε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, αλλά μόνο αυτή που δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E = n \cdot hf}$$

όπου $n = 0,1,2,3,\ldots$, ο κβαντικός αριθμός,
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} Js$ η σταθερά του Planck,
f η συχνότητα του ταλαντωτή.

Δηλαδή: **Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι κβαντισμένη.**

Στο σχήμα 5 φαίνονται οι ενεργειακές στάθμες για δύο διαφορετικές συχνότητες ακτινοβολίας. Βλέπουμε ότι η απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ενεργειακές στάθμες είναι ανάλογη της συχνότητας.

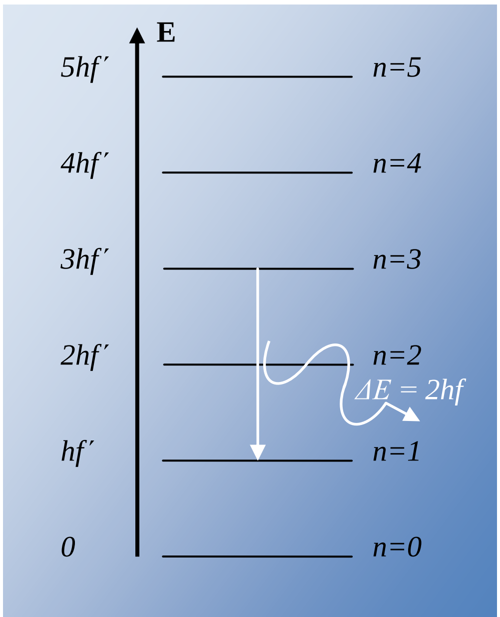


σχήμα 5

2η Υπόθεση

Οι ταλαντωτές δεν ακτινοβολούν ενέργεια κατά τρόπο συνεχή αλλά κατά άλματα ή κβάντα. Τα κβάντα εκπέμπονται όταν ο ταλαντωτής μεταβαίνει από μια υψηλότερη σε μια χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση(σχήμα 5). Η ενέργεια ενός κβάντου είναι

$$\boxed{\Delta E = \Delta n \cdot hf}$$



σχήμα 5

Όσο ο ταλαντωτής παραμένει σε κάποια από τις κβαντισμένες του καταστάσεις δεν εκπέμπει ούτε απορροφά ακτινοβολία.

Με αυτές τις υποθέσεις απέδειξε και θεωρητικά την εξίσωση (1) και πήρε το βραβείο Nobel το 1918.

Η εξίσωση (1) είναι εκτός ύλης της Γ΄Λυκείου. Αλλά για την πληρότητα της ανάλυσης, ας δούμε τις δύο σταθερές:

$$\boxed{c_1 = 2\pi c^2 h,\ c_2 = \frac{hc}{k}}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, h η σταθερά του Planck, k η σταθερά του Boltzmann, που έχουμε δει και στη Θερμοδυναμική.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η εξίσωση (1), περιέχει τους νόμους:

i) Wien. Θέτουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης Planck ίση με το μηδέν και προκύπτει

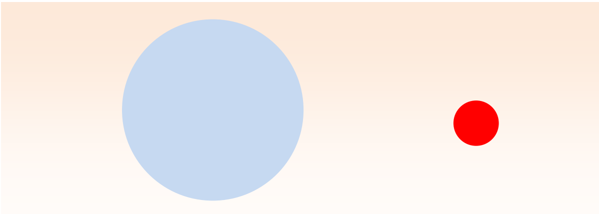
$$\boxed{\lambda_m = \frac{hc}{4{,}965kT}}$$

ii) Stefan-Boltzmann. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση Planck και προκύπτει

$$\boxed{I = \int_0^\infty I_\lambda \cdot d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4}$$

Δ. Μια άσκηση

Δύο σφαιρικά αστέρια συμπεριφέρονται ως μέλανα σώματα και ακτινοβολούν την ίδια ολική ενέργεια ανά *sec*. Το ψυχρότερο έχει επιφανειακή θερμοκρασία T_C και διάμετρο *4* φορές μεγαλύτερη από το θερμότερο άστρο.



i) Η θερμοκρασία T_H του θερμότερου άστρου είναι

α) $T_H = 2T_C$ β) $T_H = \frac{1}{2}T_C$ γ) $T_H = T_C$

ii) Ο λόγος των μηκών κύματος που αντιστοιχούν στη μέγιστη φασματική αφετική ικανότητα, για τα δυο άστρα, είναι

α) $\frac{\lambda_{m(H)}}{\lambda_{m(C)}} = 2$ β) $\frac{\lambda_{m(H)}}{\lambda_{m(C)}} = \frac{1}{2}$ γ) $\frac{\lambda_{m(H)}}{\lambda_{m(C)}} = 1$

Απάντηση

i) Η παραδοχή ότι τα άστρα συμπεριφέρονται ως μέλανα σώματα, μας επιτρέπει να πάρουμε για την ολική εκπεμπόμενη ένταση της ακτινοβολίας τους το νόμο Stefan-Boltzmann.

Αν S_C το εμβαδό της επιφάνειας του ψυχρού άστρου, η ενέργεια ανά sec που ακτινοβολεί είναι:

$$\frac{dW_C}{dt} = I_C \cdot S_C \Leftrightarrow P_C = I_C \cdot 4\pi R_C^2 \Leftrightarrow P_C = I_C \cdot 4\pi\left(\frac{\delta_C}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$P_C = I_C \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{4\delta_H}{2}\right)^2 \Leftrightarrow P_C = \sigma \cdot T_C^4 \cdot 4\pi \cdot \frac{16\delta_H^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$P_C = 16\pi \cdot \sigma \cdot \delta_H^2 \cdot T_C^4 \ (1)$$

Ομοίως για το θερμό άστρο:

$$\frac{dW_H}{dt} = I_H \cdot S_H \Leftrightarrow P_H = I_H \cdot 4\pi R_H^2 \Leftrightarrow$$

$$P_H = I_H \cdot 4\pi\left(\frac{\delta_H}{2}\right)^2 \Leftrightarrow P_H = \sigma \cdot T_H^4 \cdot 4\pi \cdot \frac{\delta_H^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$P_H = \pi \cdot \sigma \cdot T_H^4 \cdot \delta_H^2 \ (2)$$

Με βάση την εκφώνηση

$$P_H = P_C \xrightarrow{(1)(2)} \pi \cdot \sigma \cdot T_H{}^4 \cdot \delta_H{}^2 = 16\pi \cdot \sigma \cdot \delta_H{}^2 \cdot T_C{}^4 \Leftrightarrow$$

$$T_H{}^4 = 16 \cdot T_C{}^4 \Leftrightarrow T_H = \sqrt[4]{16 \cdot T_C{}^4} \Leftrightarrow$$

$\boxed{T_H = 2T_C}$ → **Σωστή απάντηση (α)**

ii) Εφαρμόζουμε τώρα το νόμο μετατόπισης του Wien.

$$\frac{\lambda_{m(H)}}{\lambda_{m(C)}} = \frac{\dfrac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{T_H}}{\dfrac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{T_C}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{m(H)}}{\lambda_{m(C)}} = \frac{T_C}{T_H} \Leftrightarrow$$

$\boxed{\dfrac{\lambda_{m(H)}}{\lambda_{m(C)}} = \dfrac{1}{2}}$ → **Σωστή απάντηση (β)**

Ε. Εφαρμογές

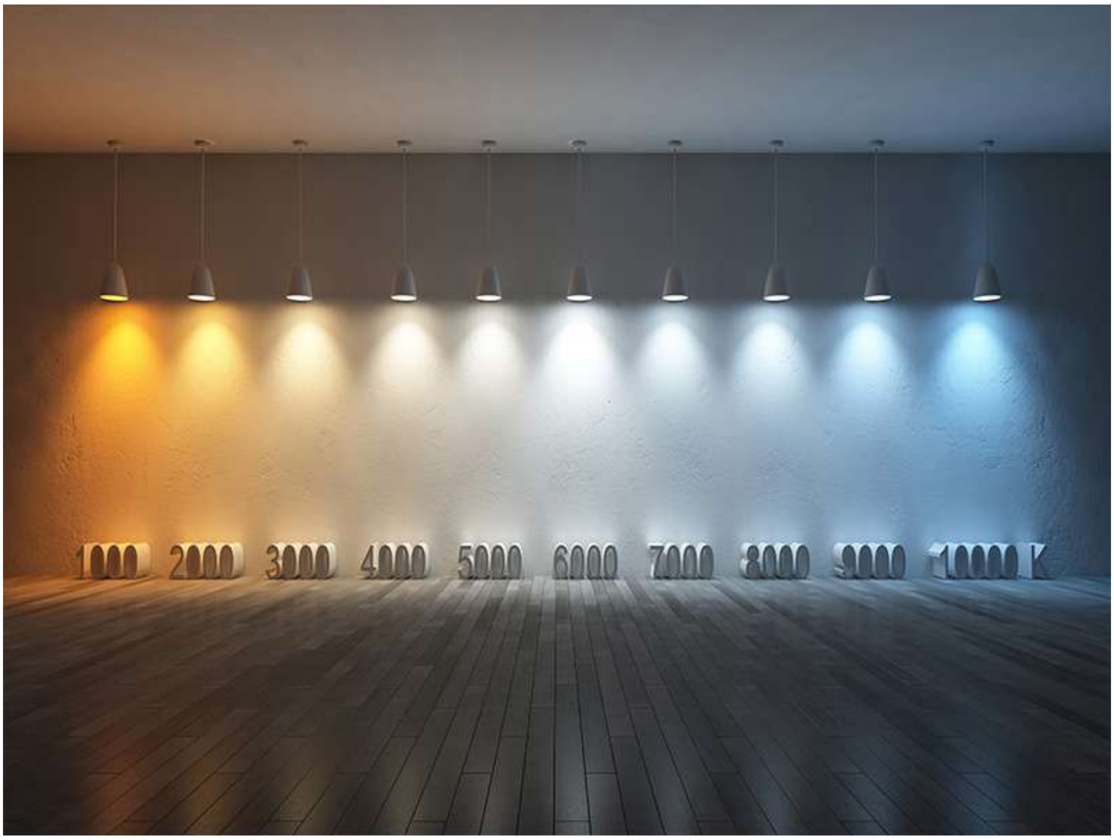
i) Το μπλε χρώμα έχει μικρότερο μήκος κύματος από το κόκκινο, άρα όταν ένα (μέλαν) σώμα λάμπει μπλε είναι πιο ζεστό από ότι να έλαμπε κόκκινο.

Ας δούμε την διπλανή φωτογραφία από το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble. Τα άστρα έχουν θερμοκρασία επιφάνειας από *2500K* ως *30000K*. Ένα θερμό άστρο, με π.χ. *T = 12000K* έχει $\lambda_m = 242nm$, δηλαδή εκπέμπει το μέγιστο της ενέργειάς του στο υπεριώδες. Η κατανομή της φασματικής αφετικής ικανότητας εύκολα μας δείχνει ότι από την περιοχή του ορατού φωτός, θα εκπέμπει περισσότερο μπλε παρά κόκκινο, άρα θα φαίνεται στο μάτι μπλε. Ένα ψυχρό άστρο, με π.χ. *T = 3000K* έχει $\lambda_m = 967nm$, δηλαδή εκπέμπει το μέγιστο της ενέργειάς του στο υπέρυθρο. Η κατανομή της φασματικής αφετικής ικανότητας εύκολα μας δείχνει ότι από την περιοχή του ορατού φωτός, θα εκπέμπει περισσότερο κόκκινο παρά μπλε, άρα θα φαίνεται στο μάτι κόκκινο. Ο Ήλιος μας έχει *T = 5800K*, άρα το λ_m ανήκει στην ορατή περιοχή, γιαυτό φαίνεται λευκός.

αστέρια μπλε = πιο θερμά

αστέρια κόκκινα = πιο ψυχρά

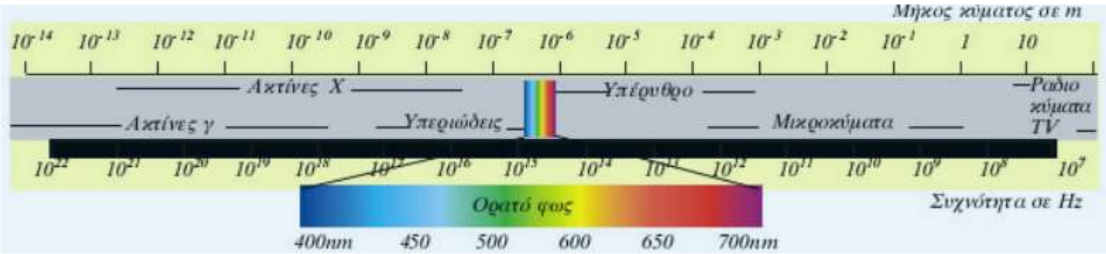
Μια εικόνα από site διακόσμησης…



ii) Το εσωτερικό του ματιού φαίνεται μαύρο, αν και ο ιστός του στο εσωτερικό δεν είναι μαύρος. Συμπεριφέρεται ως ακτινοβολούσα κοιλότητα, δηλαδή μέλαν σώμα. Το φως εισέρχεται εντός της και μετά από διαδοχικές ανακλάσεις απορροφάται πλήρως. Το εκπεμπόμενο φως από την κοιλότητα έχει μήκος κύματος στο υπέρυθρο, αφού η θερμοκρασία του σώματος είναι $T = 300K$ και από το νόμο μετατόπισης του Wien

$$\lambda_m \cdot T = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \lambda_m = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{T} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_m = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{300} \simeq 0{,}967 \cdot 10^{-5}\, m = 9670nm$$



iii) Τα θερμόμετρα υπερύθρων, ανιχνεύουν με τη βοήθεια ενός ευαίσθητου αισθητήρα την εκπεμπόμενη ισχύ από τον ασθενή και με τη βοήθεια του τύπου Stefan - Boltzmann, συγκρίνοντας με την φυσιολογική θερμοκρασία, προκύπτει η μέτρηση.

Όπως είδαμε και στην Άσκηση

$$\frac{P_{fever}}{P_{normal}} = \left(\frac{T_{fever}}{T_{normal}}\right)^4$$

Τα θερμόμετρα αυτά, λόγω της $4_{ης}$ δύναμης στη θερμοκρασία, είναι πολύ ευαίσθητα.

ΣΤ. Σχόλια

1. Ο Planck δεν ένιωθε άνετα με την κβαντική θεωρία. Τη θεώρησε ως λογικό τέχνασμα παρά θεμελιώδη αρχή.
Σε γράμμα σε έναν φίλο, την αποκάλεσε σαν « πράξη απόγνωσης, στην οποία αναγκάστηκε επειδή έπρεπε να υπάρξει μια θεωρητική εξήγηση, όποιο κι αν ήταν το τίμημα ».
Αλλά πέντε χρόνια αργότερα, ο Αϊνστάιν αναγνώρισε την ενέργεια *hf* μεταξύ των ενεργειακών σταθμών, ως την ενέργεια ενός φωτονίου, εξηγώντας το Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο. Μέχρι το 1915 δεν υπήρχε πλέον αμφιβολία για την εγκυρότητα της κβαντικής θεωρίας και την ύπαρξη φωτονίων.
Τα εύσημα για την επινόηση της έννοιας των κβάντων πηγαίνουν στον Planck, παρόλο που δεν το πίστευε στην αρχή.

2. Μεταγενέστερες μελέτες δείχνουν ότι η σχέση για τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή είναι

$$\boxed{E = (n + \frac{1}{2})hf}, \; n = 0,1,2, \ldots$$

αλλά η σχέση αυτή δε διαφοροποιεί σημαντικά τα συμπεράσματα του Planck.
Βλέπουμε όμως ότι η χαμηλότερη τιμή ενέργειας ΔΕΝ μπορεί να είναι $E = 0$. Για $n = 0$ η ενέργεια είναι $E_0 = \frac{1}{2}hf$ και ονομάζεται **ενέργεια μηδενικού σημείου**.

Πηγές:

University Physics Young-Freedman
Fundamentals of Physics [10th Edition]

Serway, Jewett - Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, 10th Edition

https://youtu.be/_0tkbp8yk-w
Φάσμα μελανού σώματος (colorado.edu)

Ανδρέας Ριζόπουλος