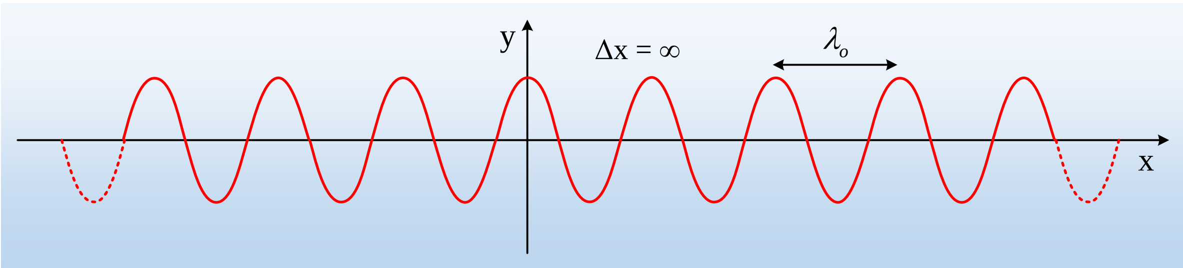
Το κύμα, το κυματοπακέτο και το σωμάτιο

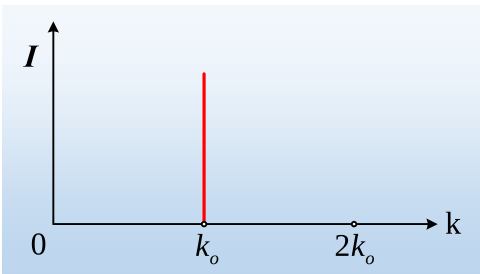
Στο παρελθόν είχε συζητηθεί στο δίκτυο το θέμα του «μονοχρωματικού κύματος» και αν αυτό διαδίδεται ή καλύπτει το χώρο από το -∞ έως το +∞. Μια σχετικά πρόσφατη τοποθέτησή μου, στο γιατί πρέπει να διδάσκουμε την διάδοση ενός τέτοιου κύματος, μπορείτε να διαβάσετε εδώ. Οπότε ας αφήσουμε την διδασκαλία των κυμάτων… τα οποία επιστρέφουν στην ύλη (αλήθεια γιατί φύγανε και γιατί επιστρέφουν;) και ας πάμε παρακάτω…

Η ένδειξη ότι η ύλη συμπεριφέρεται σαν κύμα είναι πολύ ισχυρή, αλλά και η ένδειξη ότι συμπεριφέρεται και σαν σωμάτιο, είναι επίσης πολύ ισχυρή. Αλλά τότε πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε τις δύο αυτές «πραγματικότητες»;

Έστω ότι έχουμε ένα απλό αρμονικό κύμα με μήκος κύματος λ_o, κατά μήκος του άξονα x και κάποια στιγμή t=0, πήραμε το στιγμιότυπό του, βρίσκοντας να υπάρχει κύμα από το -∞ έως το +∞, όπως στο σχήμα.



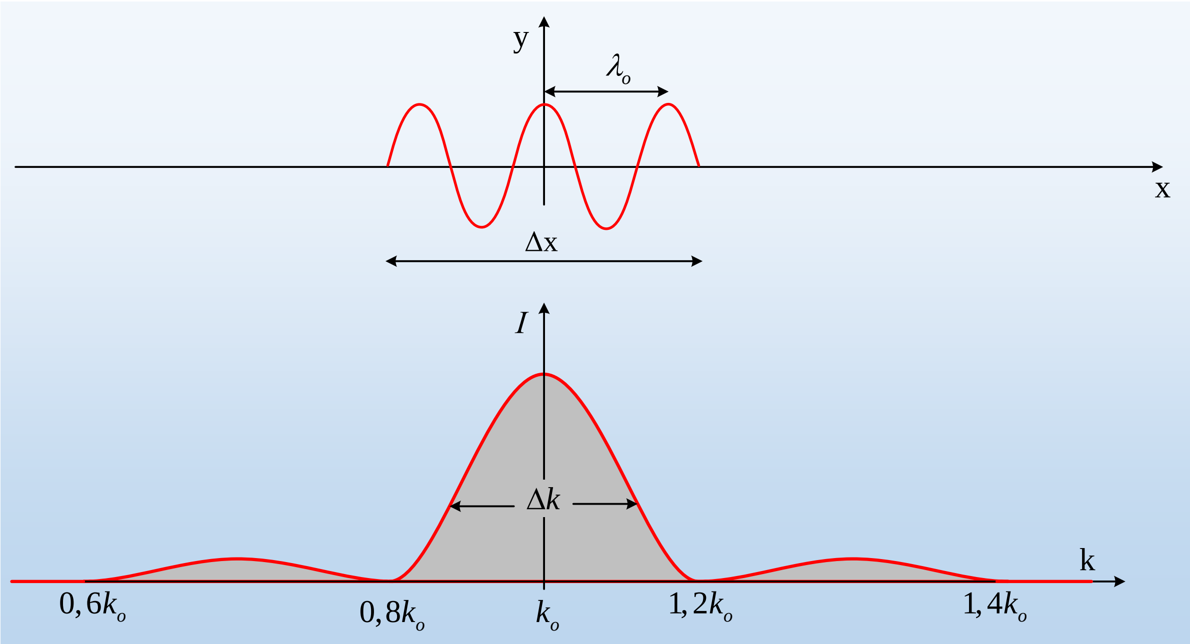
Αν παίρναμε την ένταση αυτή του κύματος, σε συνάρτηση με τον κυματαριθμό $\left(k = 2\pi\dfrac{1}{\lambda}\right)$ προφανώς θα είχαμε μια γραφική παράσταση, όπως η παρακάτω.



Συμπέρασμα; Το κύμα αυτό δεν εντοπίζεται στο χώρο διαθέτοντας ένα απολύτως σταθερό μήκος κύματος (και έναν απολύτως ακριβή κυματαριθμό k_o).

Αν αυτό το κύμα αντιπροσώπευε ένα σωμάτιο, το σωμάτιο αυτό θα μπορούσε να ήταν παντού, πάνω στον άξονα x (από το -∞ στο +∞). Δεν μπορούμε να το εντοπίσουμε σε μια θέση ή ισοδύναμα η απροσδιοριστία στην θέση του, θα ήταν Δx=∞, πάνω στον άξονα x.

Θα μπορούσαμε όμως με βάση την συμβολή των κυμάτων και την αρχή της υπέρθεσης, να κατασκευάσουμε οποιαδήποτε κυματική μορφή, με υπέρθεση ενός μεγάλου πλήθους αρμονικών κυμάτων με διαφορετικά μήκη κύματος, διαφορετικά πλάτη και διαφορετικές φάσεις. Τότε θα είχαμε ένα κυματοπακέτο, το οποίο θα μπορούσε να έχει την μορφή του παρακάτω στιγμιότυπου, όπου τα «άπειρα» αρμονικά κύματα που συμβάλουν, αναπαραγάγουν το κύμα στην περιοχή του πρώτου σχήματος, ενώ έχουν αποσβεστική συμβολή, σε όλα τα άλλα σημεία του άξονα x.



Τώρα έχουμε κλείσει σε μια μικρή περιοχή Δx το κυματοπακέτο μας, αλλά αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το κύμα μας, να χάνει σε «καθαρότητα»! Δεν έχει ένα μόνο μήκος κύματος λ_o και έναν μόνο κυματαριθμό k_o, αλλά μια περιοχή κυματαριθμών, γύρω από το k_o, όπως φαίνεται στο δεύτερο από τα παραπάνω σχήματα όπου εμφανίζει την ένταση του κύματος σε συνάρτηση με τον κυματαριθμό.

Αλλά αυτό μας οδηγεί ένα βήμα παραπέρα. Αν μειωθεί το Δx στο πάνω σχήμα, εντοπίσουμε δηλαδή τον παλμό μας σε μικρότερη περιοχή (πράγμα που παραπέμπει σε σωματιδιακή συμπεριφορά), τόσο ευρύτερη θα είναι η περιοχή των κυματαριθμών που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευασθεί ο παλμός.

Έτσι αξίζει να κάνουμε σύγκριση των δυο περιπτώσεων που αναφέραμε.

Στην πρώτη περίπτωση το κύμα εκτείνεται σε άπειρο μέσο, αλλά χρειαστήκαμε έναν κυματαριθμό για το περιγράψουμε.

Στην δεύτερη περιορίσαμε το χώρο διάδοσης, αλλά αυτό μας υποχρέωσε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα μήκη κύματος, οπότε αυξήθηκε η απροσδιοριστία Δk στον κυματαριθμό!

Βλέπουμε δηλαδή ότι όταν ελαττώνεται το Δx, αυξάνεται το Δk και αντίστροφα, πράγμα που μας οδηγεί στη σχέση:

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1 \quad (1)$$

Απροσδιοριστία στον κυματαριθμό βέβαια, σημαίνει απροσδιοριστία στο μήκος κύματος του σωματίου και κατά συνέπεια στην ορμή του, αφού:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \cdot k$$

Αλλά τότε για την απροσδιοριστία στον κυματαριθμό θα έχουμε:

$$\Delta k = \Delta\left(\frac{p_x}{\hbar}\right) = \frac{1}{\hbar} \cdot \Delta p_x$$

Και με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) θα πάρουμε:

$$\Delta x \cdot \Delta k \cong 1 \rightarrow \Delta x \cdot \frac{1}{\hbar} \cdot \Delta p_x \cong 1 \rightarrow$$
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \cong \hbar$$

Φτάνοντας έτσι στην αρχή της απροσδιοριστίας του Heisemberg!

Σημείωση:

Τελικά αποδεικνύεται ότι η ακριβής σχέση για την παραπάνω απροσδιοριστία είναι:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Βιβλιογραφία:

Halliday- Resnick Σύγχρονη Φυσική.

Ε.Ν. Οικονόμου: Τα θεμέλια.

pitt.edu

dmargaris@gmail.com