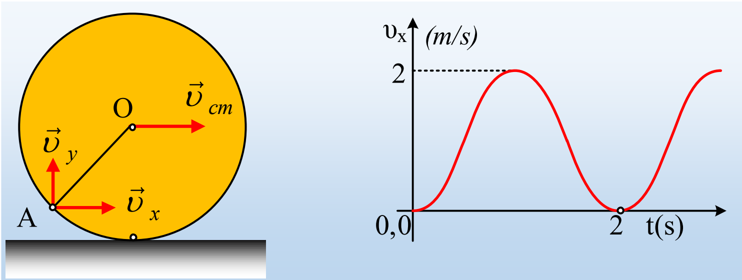
Η κύλιση και το κυκλοειδές

Ένας τροχός κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας Ο. Στο διάγραμμα δίνεται η οριζόντια ταχύτητα ενός σημείου Α, στην περιφέρεια του τροχού.

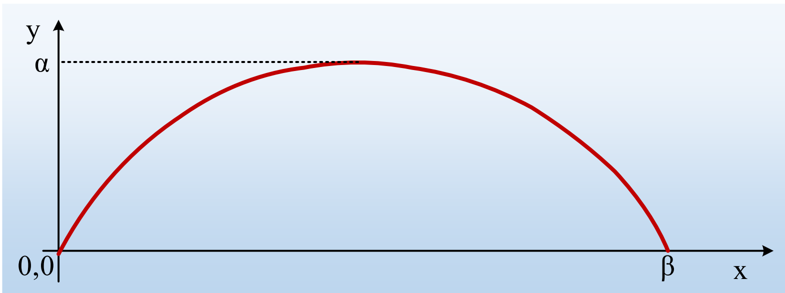


i) Ποια η αρχική θέση του σημείου Α; Αιτιολογείστε. Να βρείτε την σχέση που δίνει την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση υ_y=f(t) για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.

iii) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε την γραφική του παράσταση, μέχρι τη στιγμή t_1=4s.

iv) Η τροχιά του σημείου Α είναι μια κυκλοειδής καμπύλη, με μορφή όπως στο σχήμα, για μια πλήρη περιστροφή:

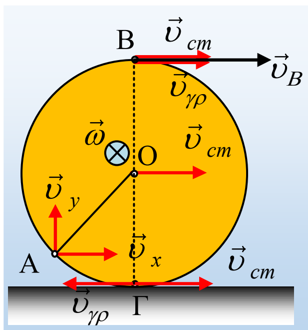


Να προσδιοριστούν οι τιμές των α και β, καθώς και το μήκος της κυκλοειδούς καμπύλης.

Δίνεται συν2φ=1-2ημ^{2}φ.

Απάντηση:

i) Παρακάτω θεωρούμε την κύλιση ως μια σύνθετη κίνηση, η οποία προκύπτει με επαλληλία μιας μεταφορικής με ταχύτητα υ_{cm} και μιας στροφικής γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο Ο του τροχού, με γωνιακή ταχύτητα ω. Αφού ο τροχός κυλίεται υ_{cm}=ωR. Αλλά τότε για το σημείο επαφής με το έδαφος, σημείο Γ, έχει ταχύτητες όπως στο σχήμα και συνολική ταχύτητα μηδενική, αφού η «κύλιση» σημαίνει χωρίς ολίσθηση. Αντίθετα το αντιδιαμετρικό του σημείο Α, το ανώτερο σημείο του τροχού, θα έχει ταχύτητα:

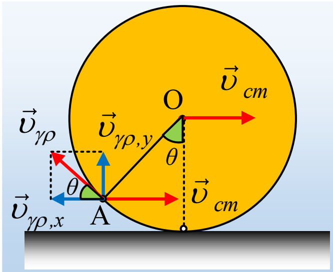


$$\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\omega R=2\upsilon_{cm}.$$

Αλλά τότε με βάση το διάγραμμα, το σημείο Α ξεκινά τη στιγμή t=0 από την θέση Γ και αποκτά την μέγιστη ταχύτητά του φτάνοντας στο ανώτερο σημείο του τροχού, έχοντας ταχύτητα υ_B=2m/s, οπότε:

$$\upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_B}{2} = \frac{2}{2} m/s = 1 m/s$$

Έστω ότι την χρονική στιγμή t, η επιβατική ακτίνα ΟΑ έχει διαγράψει την γωνία θ=ωt και βρίσκεται στην θέση του σχήματος. Τότε το σημείο Α θα έχει ταχύτητα ίση με υ_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης και ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$ εφαπτόμενη με τον τροχό, λόγω της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Ο. Με ανάλυση της γραμμικής ταχύτητας, όπως στο σχήμα, θα πάρουμε για την οριζόντια ταχύτητα του σημείου Α:



$$\upsilon_x = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \upsilon_{cm} - \omega R \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \upsilon_{cm}\left(1 - \sigma\upsilon\nu(\omega t)\right)$$

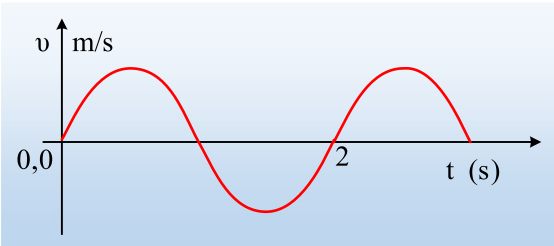
Με βάση το διάγραμμα όμως T=2s, οπότε $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ s$ και με αντικατάσταση των τιμών στην παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε:

$$\upsilon_x = 1 - \sigma\upsilon\nu(\pi t) \quad (S.I.)$$

ii) Για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, με βάση τα προηγούμενα θα είναι:

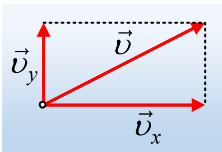
$$\upsilon_y = \upsilon_{\gamma\rho} \cdot \eta\mu\theta = \omega R \cdot \eta\mu(\omega t) = 1 \cdot \eta\mu(\pi t) \quad (S.I.)$$

Με γραφική παράσταση:



(Αξίζει να προσεχθεί η αρμονική ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση του σημείου Α, το οποίο ξεκινά από την αρνητική θέση πλάτους…)

iii) Για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α, θα έχουμε:

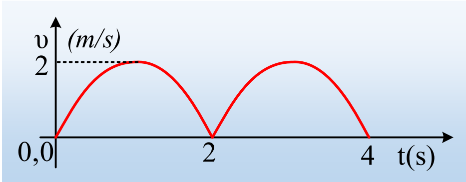


$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\left(1 - \sigma\upsilon\nu(\pi t)\right)^2 + \eta\mu^2(\pi t)} \rightarrow$$

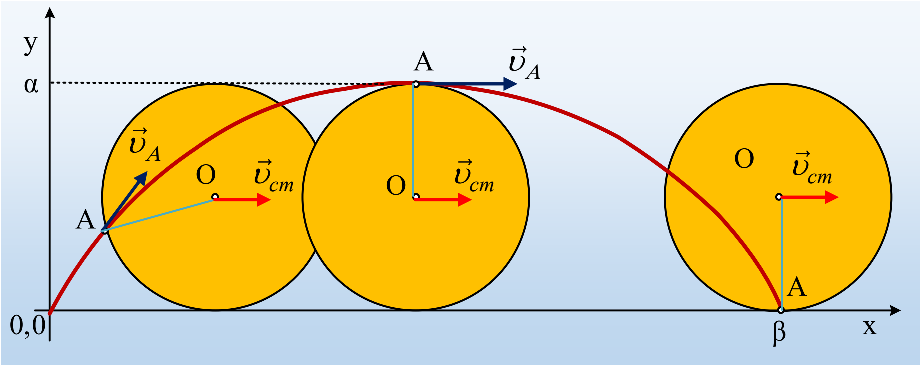
$$\upsilon = \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2(\pi t) - 2\sigma\upsilon\nu(\pi t) + \eta\mu^2(\pi t)} = \sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu(\pi t)} \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2 - 2\left[1 - 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]} = \sqrt{4\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = 2\left|\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right|$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει την μορφή ανορθωμένου ρεύματος, με περίοδο T_1=4s, όπως στο διάγραμμα:



iv) Κατά την κύλιση του τροχού το σημείο Α, θα φτάσει σε μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο ίσο με 2R, όπου R η ακτίνα του τροχού.



Αλλά:

$$\upsilon_{cm} = \omega R \rightarrow R = \frac{\upsilon_{cm}}{\omega} = \frac{1}{\pi} m$$

οπότε:

$$\alpha = 2R = \frac{2}{\pi} m$$

Ενώ σε μια πλήρη περιστροφή, έχει μετακινηθεί οριζόντια κατά:

$$\Delta x = \beta = \upsilon_{cm} \cdot T = 1 \cdot 2m = 2m$$

Παραπάνω βρήκαμε ότι το μέτρο της ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση:

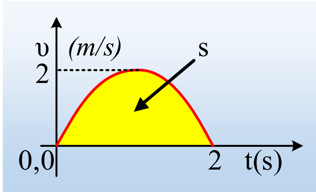
$$\upsilon = 2\left|\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right|$$

Ας φανταστούμε τώρα ένα υλικό σημείο Σ που εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους Α, το οποίο ξεκινά να ταλαντώνεται από την ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του με εξίσωση ταχύτητας:

$$\upsilon = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)t\,.$$

Το πλάτος αυτής της ταλάντωσης είναι Α, όπου $\upsilon_{max} = \omega_1 \cdot A$ οπότε:

$$A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega_1} = \frac{2}{\pi/2} = \frac{4}{\pi} m$$



Αλλά τότε στο διάγραμμα υ-t του διπλανού σχήματος το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, είναι αριθμητικά ίσο με το διανυόμενο διάστημα από 0-2s. Το διάστημα αυτό είναι η απόσταση που διανύει το υλικό σημείο Σ, πηγαίνοντας από την θέση x=-A στη θέση x=+A.

Συνεπώς το μήκος της διαδρομής που διαγράφει το σημείο Α του τροχού μας, σε μια περιστροφή, ίσο με το μήκος του κυκλοειδούς θα είναι:

$$s = 2A = 2 \cdot \frac{4}{\pi} m = \frac{8}{\pi} m \approx 2,5m$$

dmargaris@gmail.com