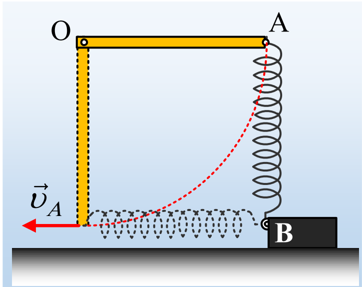
Η κίνηση της ράβδου και ο ρόλος του ελατηρίου



Η ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους d=5/3m και μάζας m=5,4kg, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, κινούμενη σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Η ράβδος συγκρατείται σε οριζόντια θέση, ενώ το άκρο της Α είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=15N/m με φυσικό μήκος l_o=2/3 m, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο Β, όπως στο σχήμα.

Σε μια στιγμή αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί, οπότε μετά από λίγο γίνεται κατακόρυφη με οριζόντιο το ελατήριο. Ζητούνται:

i) Η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, μόλις αφεθεί να πέσει.

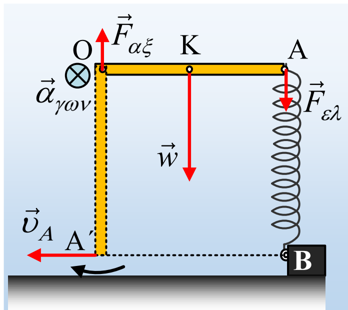
ii) Η ταχύτητα του άκρου Α τη ράβδου, τη στιγμή που αυτή γίνεται κατακόρυφη.

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, την στιγμή που γίνεται οριζόντιο.

iv) Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο Β, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, να υπολογιστεί η μέγιστη μηχανική ενέργεια της ράβδου στη διάρκεια της κίνησής της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της I=md²/3, $\sqrt{2} \approx 1,4$ και g=10m/s².

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί. Αφού λάβουμε υπόψη ότι το παραλληλόγραμμο ΟΑΒΑ΄ είναι τετράγωνο (γιατί;), θα έχουμε για το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell = k \cdot \left(d - \ell_o\right) = 15 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right) N = 15N$$

Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της ράβδου, παίρνουμε (θετική η φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού):

$$\Sigma\tau = I_o \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \cdot \frac{d}{2} + F_{\varepsilon\lambda} \cdot d = \frac{1}{3} md^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3\left(mg + 2F_{\varepsilon\lambda}\right)}{2md} = \frac{3(5,4 \cdot 10 + 2 \cdot 15)}{2 \cdot 5,4 \cdot {}^{5}\!/_{3}} rad/s^2 = 14 rad/s^2 .$$

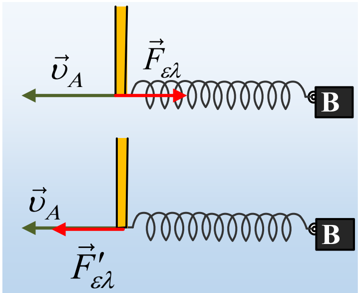
ii) Το ελατήριο έχει το ίδιο μήκος, τόσο στην κατακόρυφη θέση, όσο και στην οριζόντια, αφού l=d. Εφαρμόζουμε για το σύστημα ράβδος-ελατήριο την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ τη αρχικής θέσης και της θέσης που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Β ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, (σύμφωνα με την υπόδειξη, αν και θα μπορούσαμε να ορίσουμε άλλο στο παρόν ερώτημα…) και έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{β,αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K_{τελ} + U_{β,τελ} + U_{ελ,τελ} \rightarrow$$
$$0 + mgd + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_o)^2 = \frac{1}{2}I_o\omega^2 + mg\frac{d}{2} + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_o)^2 \rightarrow$$
$$mg\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}md^2 \cdot \omega^2 \rightarrow$$
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{d}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10}{5/3}}rad/s = 3\sqrt{2}rad/s.$$

Οπότε το άκρο Α της ράβδου έχει γραμμική ταχύτητα:

$$\upsilon_A = \omega \cdot d = 3\sqrt{2} \cdot \frac{5}{3}m/s = 5\sqrt{2}m/s$$

iii) Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η δύναμη που το ελατήριο ασκεί στο άκρο της ράβδου, με μέτρο $F_{ελ}$=15N (ίδια επιμήκυνση με την κατακόρυφη θέση, συνεπώς ίδια δύναμη, μέτρου $F_{ελ}=k \cdot \Delta l$). Η αντίδρασή της $F'_{ελ}$ ασκείται στο άκρο του ελατηρίου από την ράβδο, έχοντας την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα του άκρου Α, άρα και με την ταχύτητα του άκρου του ελατηρίου. Αλλά η μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου οφείλεται στο έργο της δύναμης $F'_{ελ}$ που του ασκεί η ράβδος, οπότε:

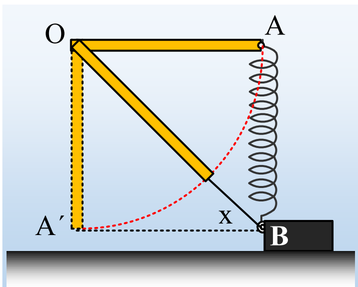


$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = \frac{|F'_{ελ}| \cdot |dx| \cdot συν0^o}{dt} = |F'_{ελ}| \cdot |\upsilon_A| = 15 \cdot 5\sqrt{2}J/s = 75\sqrt{2}J/s$$

Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι αντίθετος είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου, αφού:

$$\frac{dK}{dt} = P_\tau = -\tau\omega = -Fd\omega = -15 \cdot \frac{5}{3} \cdot 3\sqrt{2}J/s = -75\sqrt{2}J/s$$

iv) Κατά την περιστροφή της ράβδου, η ενέργεια του συστήματος ράβδος-ελατήριο παραμένει σταθερή. Αλλά τότε η μηχανική ενέργεια της ράβδου γίνεται μέγιστη, όταν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, γίνει ελάχιστη. Αυτό συμβαίνει όταν το ελατήριο έχει την ελάχιστη παραμόρφωση (επιμήκυνση ή συσπείρωση). Το ελάχιστο μήκος το ελατήριο, την εμφανίζει στη θέση του διπλανού σχήματος, όπου η ράβδος βρίσκεται πάνω στην διαγώνιο του τετραγώνου ΟΑΒΑ΄. Για το μήκος του ελατηρίου ℓ' στην θέση αυτή, θα έχουμε:



- Αν x= $\ell' < \ell_o$, σημαίνει ότι τη στιγμή που το ελατήριο βρίσκεται στη θέση του σχήματος έχει κάποια συσπείρωση. Αν σκεφτούμε ότι στην αρχική θέση το ελατήριο έχει κάποια επιμήκυνση, τότε στην διάρκεια της πτώσης της ράβδου, το ελατήριο μείωσε την επιμήκυνσή του, κάποια στιγμή t΄ απέκτησε το φυσικό μήκος του και στη συνέχεια συσπειρώθηκε, μέχρι να έρθει στην διαγώνιο του τετραγώνου. Αλλά τότε την στιγμή t΄ έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια (U=0) και ισοδύναμα στην θέση αυτή η ράβδος θα έχει την μέγιστη μηχανική ενέργεια.

- Αν $\ell' > \ell_o$, τότε στην θέση αυτή θα έχουμε ελάχιστη παραμόρφωση, από κάθε άλλη προηγούμενη ή επόμενη θέση, συνεπώς ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και άρα μέγιστη μηχανική ενέργεια για την ράβδο.
- Αν $\ell' = \ell_o$ τότε στη θέση αυτή $U_{ελ}=0$, οπότε και πάλι η μηχανική ενέργεια της ράβδου είναι μέγιστη.

Τι από τα παραπάνω ισχύει; Υπολογίζουμε την απόσταση x, όπου θα είναι το μήκος του ελατηρίου, στην θέση αυτή. Από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ παίρνουμε:

$$(OB) = \sqrt{(OA)^2 + (AB)^2} = \sqrt{d^2 + d^2} = d\sqrt{2} \rightarrow$$

$$x = \ell' = (OB) - d = d\sqrt{2} - d = d(\sqrt{2} - 1) = \frac{5}{3}(1,4-1)m = \frac{2}{3}m$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στην θέση αυτή, το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, άρα μηδενική δυναμική ενέργεια, οπότε από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα, μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης που η ράβδος σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{β,αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K'_{τελ} + U'_{β,τελ} + U'_{ελ,τελ} \rightarrow$$

$$0 + mgd + \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_o\right)^2 = \left(K'_{τελ} + U'_{β,τελ}\right) + 0 \rightarrow$$

$$E_{μ,max} = \left(K'_{τελ} + U'_{β,τελ}\right) = mgd + \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_o\right)^2 \rightarrow$$

$$E_{μ,max} = 5,4 \cdot 10 \cdot \frac{5}{3}J + \frac{1}{2}15 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 J = 97,5J$$

dmargaris@gmail.com