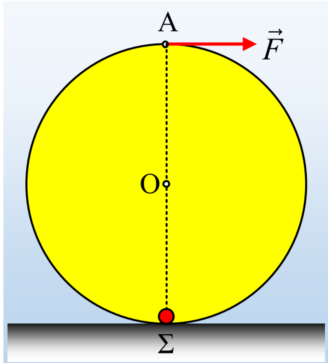
Ένα στερεό από δίσκο και υλικό σημείο

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα στερεό S, το οποίο αποτελείται από έναν ομογενή δίσκο μάζας m=1kg και ακτίνας R=0,2m και ένα υλικό σημείο, αμελητέων διαστάσεων, της ίδιας μάζας m, το οποίο έχει προσκολληθεί στο άκρο Σ μιας κατακόρυφης ακτίνας, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$, με τη βοήθεια νήματος αμελητέας μάζας που έχουμε τυλίξει στον δίσκο, ασκούμε στο ανώτερο σημείο Α, του δίσκου, οριζόντια δύναμη F=3Ν. Αν το στερεό S κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), ζητούνται για την στιγμή $t=t_0^+$ (αμέσως μετά την άσκηση της δύναμης F):



i) Η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς το κέντρο μάζας του Κ, το μέσον της ακτίνας ΟΣ.

ii) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού S και η γωνιακή του επιτάχυνση.

iii) Η επιτάχυνση του κέντρου Ο του δίσκου και του σημείου εφαρμογής της δύναμης, σημείου Α.

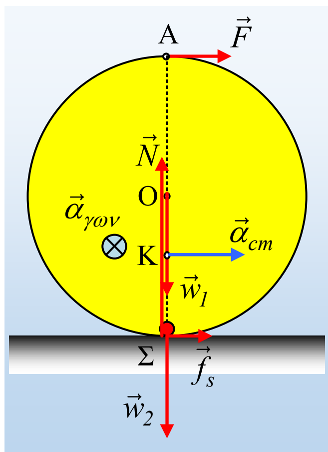
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του I= ½ mR^2, ενώ το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων, με ίσες μάζες, είναι το μέσον Κ της ακτίνας ΟΣ.

Απάντηση:

i) Για την ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς το κέντρο μάζας Κ θα έχουμε και με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner:

$$I_{cm} = I_\delta + I_\Sigma = \left(\frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = mR^2 = 1\cdot 0{,}2^2\,kgm^2 = 0{,}04kgm^2.$$

ii) Θεωρούμε την κίνηση του στερεού σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Κ. Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται σε δίσκο και υλικό σημείο, υποθέτοντας ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, παίρνουμε με εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα:

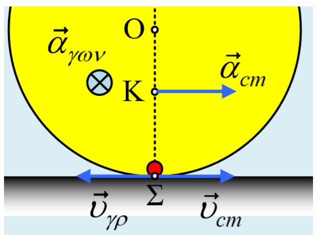


Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F+f_s=2m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_K=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot(AK)-f_s\cdot(K\Sigma)=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$F\cdot\frac{3R}{2} - f_s\cdot\frac{R}{2} = mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 3F - f_s = 2mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αν έρθουμε τώρα στο σημείο επαφής του στερεού με το επίπεδο, αυτό θα έχει μια ταχύτητα υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της στροφικής, με κατευθύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά αφού ο στερεό κυλίεται $\upsilon_\Sigma=0$ οπότε:



$$\upsilon_{cm} = \omega\frac{R}{2} \rightarrow \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{R}{2} \rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{R}{2} \quad (3)$$

Οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη την (3) παίρνουμε:

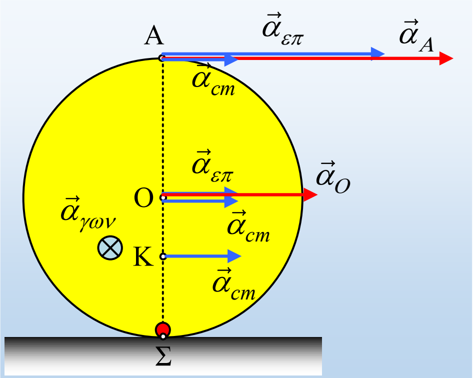
$$3F + F = 2ma_{cm} + 4m\alpha_{cm} \quad \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{4F}{6m} = \frac{2F}{3m} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot 1}m/s^2 = 2m/s^2 \quad \xrightarrow{(3)}$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\alpha_{cm}}{R} = \frac{2\cdot 2}{0,2}rad/s^2 = 20rad/s^2.$$

Με κατευθύνσεις όπως στο παραπάνω σχήμα.

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουνε σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις (α_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και $\alpha_{\varepsilon\pi}$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης των σημείων O και A, γύρω από το κέντρο μάζας K). Έτσι για τις επιταχύνσεις των δύο σημείων θα έχουμε:



$$\vec{\alpha}_O = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon\pi} \rightarrow$$

$$\alpha_O = \alpha_{cm} + \omega\cdot\frac{R}{2} = 2m/s^2 + 20\cdot\frac{0,2}{2}m/s^2 \rightarrow$$

$$\alpha_O = 4m/s^2.$$

Οριζόντια ίδιας κατεύθυνσης με την α_{cm}.

Όμοια για το σημείο A:

$$\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon\pi} \rightarrow$$

$$\alpha_A = \alpha_{cm} + \omega\cdot\frac{3R}{2} = 2m/s^2 + 20\cdot\frac{3\cdot 0,2}{2}m/s^2 \rightarrow$$

$$\alpha_A = 8m/s^2.$$

Της ίδιας κατεύθυνσης.

dmargaris@gmail.com