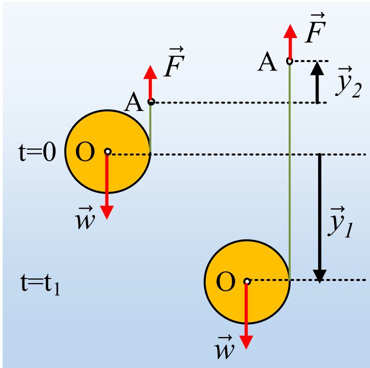
Γιο – γιο, μόνο με ενέργειες

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο βάρους w=10N έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Αφήνουμε τη στιγμή t=0 τον κύλινδρο να πέσει κατακόρυφα, ενώ ταυτόχρονα ασκούμε στο άκρο Α του νήματος, μια κατακόρυφη σταθερή δύναμη F, μέτρου F=0,4w. Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, ο κύλινδρος έχει κατέβει κατά y_1=1,5m, ενώ το άκρο Α του νήματος έχει ανέβει κατά y_2=0,5m, όπως φαίνεται στο σχήμα.



i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο από 0-t_1, μέσω του έργου της δύναμης F.

ii) Θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης, να υπολογιστούν η μεταφορική και η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή t_1.

iii) Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα να επιβεβαιώσετε την διατήρηση της ενέργειας, για την κίνηση του κυλίνδρου στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

(η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δεν είναι γνωστή).

Απάντηση:

i) Η δύναμη F, ασκείται στο άκρο Α του νήματος, συνεπώς μεταφέρει ενέργεια στο νήμα (και μέσω αυτού στον κύλινδρο) ίση με:

$$W_F = F\cdot y_2\cdot συν0^\circ = F\cdot y_2 = 0{,}4w\cdot y_2 = 0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}5J = 2J$$

ii) Εφαρμόζουμε για την **μεταφορική** κίνηση του κυλίνδρου το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων (στις στιγμές t=0 και t_1):

$$K_{μ,1} - K_{μ,0} = W_w + W_F \rightarrow$$
$$K_{μ,1} - 0 = w\cdot y_1 - F\cdot y_1 = w\cdot y_1 - 0{,}4w\cdot y_1 = 0{,}6w\cdot y_1 \rightarrow$$
$$K_{μ,1} = 0{,}6\cdot 10\cdot 1{,}5J = 9J$$

Με αντίστοιχη εφαρμογή του ίδιου θεωρήματος για την **περιστροφική** κίνηση του κυλίνδρου, παίρνουμε:

$$K_{σ,1} - K_{σ,0} = ΣW_τ \rightarrow K_{σ,1} - 0 = τ_F\cdot θ \rightarrow$$
$$K_{σ,1} = FR\cdot θ = F\cdot(Rθ) = F\cdot(y_1 + y_2) \rightarrow$$
$$K_{σ,1} = 0{,}4\cdot 10\cdot(1{,}5 + 0{,}5)J = 8J$$

Όπου το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται R·θ, με βάση και το σχήμα, είναι ίσο με το άθροισμα των **μέτρων** των δύο μετατοπίσεων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$.

iii) Αν θεωρήσουμε το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο Ο του κυλίνδρου στην θέση που βρίσκεται τη στιγμή t_1, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, τότε τη στιγμή t=0 θα έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_0 = mgh = w\cdot y_1 = 10\cdot 1{,}5J = 15J$$

Αν στην αρχική αυτή ενέργεια προσθέσουμε την ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο στη διάρκεια της κίνησης, μέσω του έργου της F, τότε τη στιγμή t_1 θα έχει ενέργεια:

$$E_1 = U_0 + W_F = 15J + 2J = 17J$$

Αυτή η ενέργεια πρέπει να εμφανίζεται με την μορφή της κινητικής ενέργειας. Εμφανίζεται;

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου την στιγμή t_1 είναι ίση:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = K_{\mu,1} + K_{\sigma,1} \rightarrow$$
$$K_1 = 9J + 8J = 17J$$

Βλέπουμε δηλαδή να επιβεβαιώνεται ότι:

$$U_0 + K_0 + W_F = U_1 + K_1$$

Που εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας, στην παραπάνω περίπτωση.

dmargaris@gmail.com