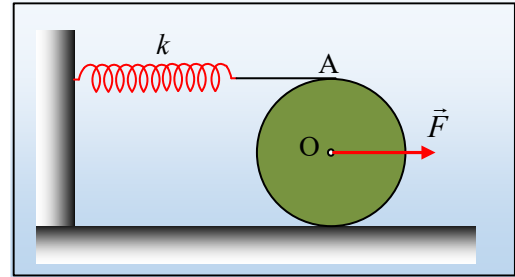


Όταν τυλίγεται το νήμα, το ελατήριο επιμηκώνεται

Ο κύλινδρος του σχήματος, μάζας $m=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Γύρω του έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, το οποίο συνδέεται με οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=20\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του, ενώ το άλλο άκρο του έχει στερεωθεί σε κατακόρυφο τοίχο. Σε μια στιγμή στο κέντρο μάζας O του κυλίνδρου ασκείται (με κατάλληλο τρόπο) μια σταθερή οριζόντια δύναμη F μέτρου $F=23\text{N}$, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλιέται και μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 , ο άξονας του κυλίνδρου να έχει μετατοπισθεί κατά $x_1=0,2\text{m}$. Για την στιγμή αυτή ζητούνται:

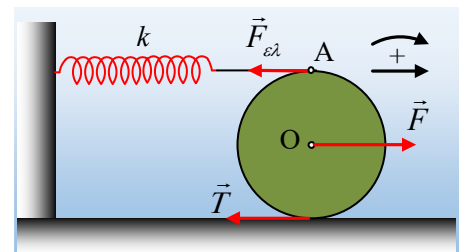


- i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας O και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- ii) Η ενέργεια που έχει μεταφερθεί, μέχρι τη στιγμή αυτή, στον κύλινδρο, μέσω του έργου της δύναμης F , καθώς και η ταχύτητα του ανώτερου σημείου A του κυλίνδρου.
- iii) Η ισχύς της δύναμης F , καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται σε μια τυχαία θέση στον κύλινδρο. Ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα δεξιά και για να κυλιέται θα πρέπει να περιστραφεί ωρολογιακά, όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα.



- i) Θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορά και μια περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας O και ενώνει τα κέντρα των δύο βάσεων του κυλίνδρου, παίρνουμε με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F - F_{ελ} - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_o = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T \cdot R - F_{ελ} \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{γων} \rightarrow$$

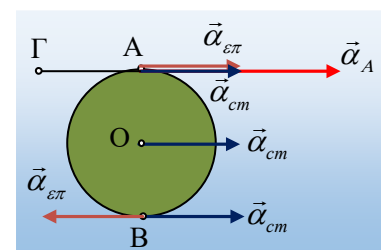
$$T - F_{ελ} = \frac{1}{2} m R \cdot \alpha_{γων} \quad (2)$$

$$\text{Ενώ ισχύει, λόγω κύλισης, και } a_{cm} = \alpha_{γων} \cdot R \quad (3)$$

Με βάση το διπλανό σχήμα, το σημείο B επαφής με το έδαφος έχει μηδενική επιτάχυνση, ενώ αντίθετα το ανώτερο σημείο A του κυλίνδρου, έχει εφαπτομενική επιτάχυνση:

$$\alpha_A = a_{cm} + a_{επ} = a_{cm} + \alpha_{γων} R = 2a_{cm}.$$

Το σημείο A έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία δεν μας χρειάζεται τη στιγμή αυτή.



Αλλά αν κάθε στιγμή το σημείο Α έχει διπλάσια επιτάχυνση από το κέντρο Ο, τότε και η μετατόπισή του, θα είναι διπλάσια της μετατόπισης του Ο, κάθε στιγμή. Έτσι τη στιγμή t_1 που το Ο έχει μετατοπισθεί κατά x_1 , το Α έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x_A = 2x_1 = 0,4\text{m}$, ίση με την μετατόπιση και του σημείου Γ, του άκρου του ελατηρίου. Συνεπώς τη στιγμή t_1 το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta \ell = 0,4\text{m}$, ασκώντας στον κύλινδρο δύναμη μέτρου:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta \ell = 20 \cdot 0,4\text{N} = 8\text{N}$$

Αλλά τότε με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη, με την βοήθεια και της (3) παίρνουμε:

$$F - 2F_{\varepsilon\lambda} = \frac{3}{2} m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2(F - 2F_{\varepsilon\lambda})}{3m} = \frac{2(23 - 2 \cdot 8)}{3 \cdot 4} \text{m/s}^2 = \frac{7}{6} \text{m/s}^2.$$

Και από την σχέση (3):

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{7}{6 \cdot 0,1} \text{rad/s}^2 = \frac{35}{3} \text{rad/s}^2.$$

ii) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης F, είναι ίση με το έργο της:

$$W_F = F \cdot x_1 = 23 \cdot 0,2\text{J} = 4,6\text{J}$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε, για τον κύλινδρο παίρνουμε:

$$K_1 - K_0 = W_w + W_N + W_F + W_\tau + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \quad (4)$$

Όμως για την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega_1^2 \xrightarrow{v_1 = \omega_1 R} K_1 = \frac{3}{4} m v_1^2$$

Ενώ $W_N = W_w = 0$ δυνάμεις κάθετες στην μετατόπιση, $W_\tau = 0$, το σημείο εφαρμογής της δεν μετακινείται,

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\Delta U = -\frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = -\frac{1}{2} 20 \cdot 0,4^2 \text{J} = -1,6\text{J} \xrightarrow{(4)}$$

$$\frac{3}{4} m v_1^2 - 0 = 4,6\text{J} - 1,6\text{J} \rightarrow v_1 = 1\text{m/s}$$

Οπότε το σημείο Α, έχει τις ταχύτητες v_{cm} λόγω μεταφοράς και $v_{\gamma\rho} = \omega R = v_{cm}$, λόγω περιστροφής, συνολικά δηλαδή:

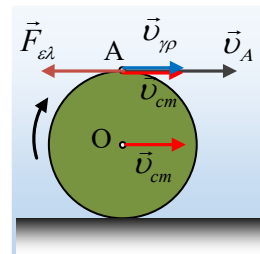
$$v_A = 2v_{cm} = 2\text{m/s}$$

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, έργο πάνω στον κύλινδρο παράγουν μόνο η δύναμη F και η δύναμη του ελατηρίου. Για την ισχύ κάθε δύναμης (στο σχήμα φαίνεται η δύναμη του ελατηρίου, η οποία ασκείται στο σημείο Α) έχουμε:

$$P_F = F \cdot v_{cm} = 23 \cdot 1\text{W} = 23\text{W}$$

$$P_{F_{\varepsilon\lambda}} = -F_{\varepsilon\lambda} \cdot v_A = -8 \cdot 2\text{W} = -16\text{W}$$

Αλλά αν η δύναμη μεταφέρει ενέργεια 23J/s στον κύλινδρο και η δύναμη του ελατηρίου αφαιρεί τα 16J/s,



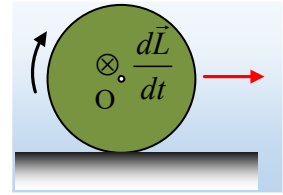
σημαίνει ότι η ενέργεια του κυλίνδρου αυξάνεται κατά 7J/s. Έχουμε δηλαδή:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = P_F + P_{F_{ελ}} = 23J/s - 16J/s = 7J/s$$

iv) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\frac{dL_{cm}}{dt} = \Sigma \tau_o = T \cdot R - F_{ελ} \cdot R = I_{cm} \cdot a_{γων} = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{γων}$$

$$\frac{dL_{cm}}{dt} = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{γων} = \frac{1}{2} 4 \cdot 0,1^2 \cdot \frac{35}{3} \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = \frac{7}{30} \text{kgm}^2 / \text{s}^2.$$



Ο παραπάνω ρυθμός είναι διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου, με φορά προς τα μέσα, όπως στο διπλανό σχήμα.

dmargaris@gmail.com