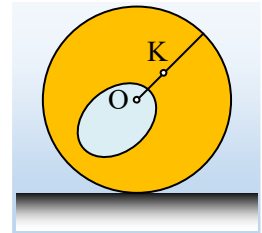


Ένας δίσκος με κοιλότητα

Ένας δίσκος ο οποίος παρουσιάζει μια κοιλότητα, αφήνεται να κινηθεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο με το επίπεδό του κατακόρυφο, στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, όπου O το κέντρο του δίσκου και K το κέντρο μάζας του.



- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο.
- ii) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας K θα είναι:
 - α) οριζόντια, β) κατακόρυφη, γ) πλάγια.

iii) Η αρχική επιτάχυνση του κέντρου O του δίσκου θα είναι:

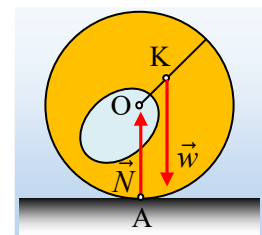
- α) οριζόντια με φορά προς τα δεξιά, β) οριζόντια με φορά προς τα αριστερά, γ) κατακόρυφη.

iv) Αν το επίπεδο δεν ήταν λείο, να εξηγήσετε γιατί θα ασκηθεί δύναμη τριβής στο δίσκο και να την σχεδιάσετε στο σχήμα.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στον δίσκο, όπου το βάρος περνά από το κέντρο μάζας K, ενώ η δύναμη στήριξης ασκείται στο σημείο επαφής με το επίπεδο A και είναι κάθετη στην επιφάνεια κατευθυνόμενη προς το κέντρο O του δίσκου.



ii) Θεωρώντας την κίνηση του δίσκου ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας K, θα έχουμε:

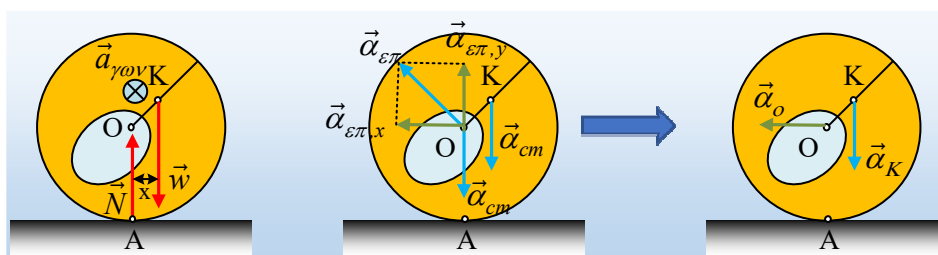
$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \rightarrow mg - N = ma_{cm}$$

Αλλά αν οι δύο δυνάμεις είναι κατακόρυφες, και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας K θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω. Σωστό το β).

iii) Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση, γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας K του δίσκου, παίρνουμε:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow N \cdot x = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu}$$

Όπου x ο μοχλοβραχίονας της N ως προς το κέντρο μάζας K. Συνεπώς ο δίσκος αποκτά γωνιακή επιτάχυνση, κάθετη στο επίπεδο του δίσκου, όπως στο πρώτο σχήμα.



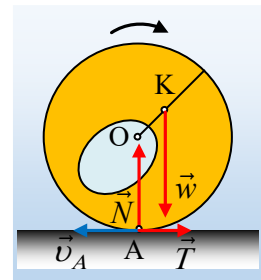
Αλλά τότε το κέντρο O του δίσκου, έχει λόγω μεταφορικής κίνησης την κατακόρυφη επιτάχυνση \vec{a}_{cm} , ενώ εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης του δίσκου, έχει και επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_{επ}$ κάθετη στην ακτίνα (OK), όπως στο δεύτερο σχήμα. Αλλά τότε αναλύοντας την επιτρόχια επιτάχυνση σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, θα έχουμε για το σημείο O:

$$\alpha_{o,y} = a_{επ,y} - a_{cm} = 0 \quad \text{και}$$

$$\alpha_{o,x} = a_{επ,x} = a_o$$

Αφού το O δεν μπορεί να επιταχυνθεί κατακόρυφα (θα απέχει πάντα κατά R από το επίπεδο), οπότε θα έχει οριζόντια επιτάχυνση, ίση με την $\vec{a}_{επ,x}$, με φορά προς τα αριστερά, όπως στο τρίτο από τα παραπάνω σχήματα και σωστό είναι το β).

iv) Με βάση τα παραπάνω, μόλις αφηθεί ο δίσκος στο οριζόντιο επίπεδο, τείνει να περιστραφεί σύμφωνα με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, οπότε το σημείο επαφής με το επίπεδο A, τείνει να αποκτήσει μια ταχύτητα μέτρου $v_A = \omega R$, όπως στο σχήμα, με φορά προς τα αριστερά. Αλλά τότε, αν το επίπεδο δεν είναι λείο, θα ασκηθεί στον δίσκο δύναμη τριβής, με κατεύθυνση προς τα δεξιά, για να αντισταθεί στην επικείμενη ταχύτητα του σημείου A.



- Ο ρόλος της τριβής αυτής θα είναι διπλός. Από την μια θα προσδώσει μια οριζόντια επιτάχυνση $a_{cm,x}$ στο κέντρο μάζας K, ενώ από την άλλη θα μειώσει την γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, αφού η ροπή της τριβής είναι αντίθετης φοράς από την ροπή της κάθετης αντίδρασης N.
- Η τριβή αυτή μπορεί να είναι στατική (οπότε ο δίσκος θα κυλίεται) ή και τριβή ολίσθησης αναλόγως των δεδομένων (θέση και μέγεθος κοιλότητας, συντελεστής τριβής με το επίπεδο, θέση κέντρου μάζας K).

dmargaris@gmail.com