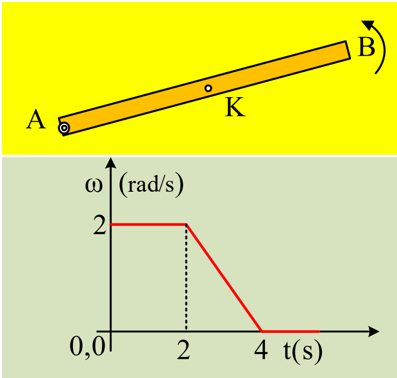
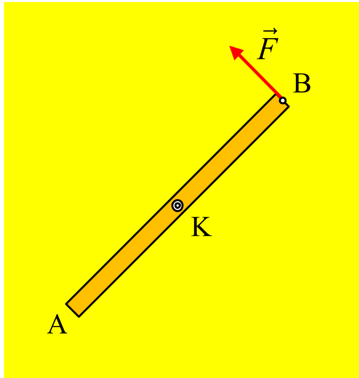
Η περιστροφή μιας δοκού

Μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 2m, περιστρέφεται οριζόντια, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, σε λείο οριζόντιο επίπεδο (το σχήμα σε κάτοψη). Κάποια στιγμή δέχεται στο άκρο της Β, μια οριζόντια δύναμη F μέτρου F=10Ν, με διεύθυνση κάθετη στη δοκό. Στο διάγραμμα δίνεται η γωνιακή ταχύτητα της δοκού σε συνάρτηση με το χρόνο.





i) Για πόσο χρονικό διάστημα ασκήθηκε στη δοκό η δύναμη F; Να σχεδιάσετε στο πρώτο σχήμα την δύναμη F. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ της δοκού, τη χρονική στιγμή t_1=1s και να την σχεδιάσετε στο σχήμα.

ii) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής της.

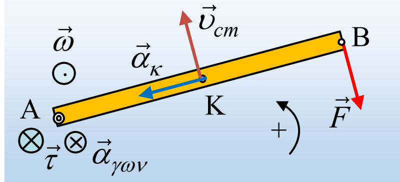
iii) Ελευθερώνουμε την ράβδο από τον άξονα z και την θέτουμε σε περιστροφή για t=0, γύρω από άλλον κατακόρυφο άξονα z_1, ο οποίος περνά από το μέσον της Κ, με την επίδραση της ίδιας δύναμης F, η οποία ασκείται ξανά στο άκρο Β, κάθετα στον άξονα της δοκού, όπως στο δεύτερο σχήμα (ξανά σε κάτοψη). Αν η δοκός έχει μάζα m=15kg, να υπολογιστούν τη χρονική στιγμή t_2=3s:

α) Η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού.

β) Η γωνιακή της ταχύτητα της δοκού και η ταχύτητα του άκρου Α.

γ) η γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί η δοκός.

Απάντηση:



i) Στο χρονικό διάστημα 0-2s η γωνιακή ταχύτητα της δοκού παραμένει σταθερή, πράγμα που σημαίνει ότι η δοκός έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση και άρα δεν δέχεται κάποια ροπή. Ροπή και άρα άσκηση δύναμης, έχουμε στο χρονικό διάστημα από 2s - 4s, όπου μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα. Στο διάστημα αυτό η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται, άρα η γωνιακή επιτάχυνση έχει αντίθετη κατεύθυνση από την γωνιακή ταχύτητα (θεωρώντας ότι ω>0 θα έχουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}<0$, όπως στο σχήμα), άρα αρνητική θα είναι και η ασκούμενη ροπή και η δύναμη θα έχει την φορά που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έτσι την στιγμή t_1 το κέντρο μάζας Κ της δοκού έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει, όπως στο σχήμα), μέτρου:

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = \omega^2 \cdot \frac{\ell}{2} = 2^2 \cdot 1m/s^2 = 4m/s^2.$$

ii) Στο χρονικό διάστημα 2s-4s η δοκός κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, ίση με την μέση τιμή της, αφού στο διάγραμμα ω-t η κλίση παραμένει σταθερή, με αλγεβρική τιμή:

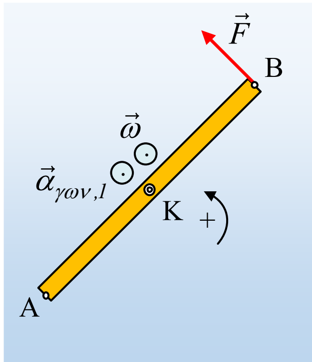
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-2rad/s}{4s-2s} = -1rad/s^2.$$

Παίρνουμε τώρα το 2ο νόμο του Νεύτωνα, δουλεύοντας με τις **αλγεβρικές τιμές** των φυσικών μεγεθών:

$$\Sigma\tau_A = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow -F \cdot \ell = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$I_A = -\frac{F \cdot \ell}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = -\frac{10 \cdot 2}{-1} kgm^2 = 20kgm^2.$$

iii) Η παραπάνω ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα z, συνδέεται με την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z_1 ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Κ, με την εξίσωση:



$$I_A = I_{cm} + md^2 \rightarrow$$

$$I_{cm} = I_A - m\frac{\ell^2}{4} = 20kgm^2 - 15 \cdot \frac{2^2}{4} kgm^2 = 5kgm^2.$$

α) Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της δοκού, παίρνουμε (θετική η αντιωρολογιακή φορά):

$$\Sigma\tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow F \cdot \frac{\ell}{2} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{F \cdot \ell}{2I_{cm}} = \frac{10 \cdot 2}{2 \cdot 5} rad/s^2 = 2rad/s^2.$$

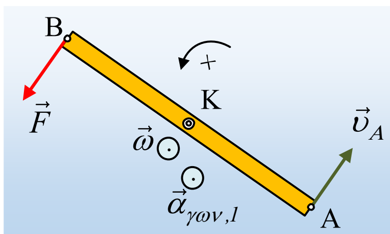
Αυτή η γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή, άρα και την στιγμή t_2=3s η δοκός έχει αυτήν την στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση.

β) Αφού έχουμε σταθερή γωνιακή επιτάχυνση η κίνηση είναι στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, για την οποία, κατά αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot t \quad (1) \qquad \varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot t^2 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot t_2 = 2 \cdot 3rad/s = 6rad/s$$



Πάνω στον άξονα z_1 με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα.

Εξάλλου το άκρο Α έχει (γραμμική) ταχύτητα, κάθετη στη δοκό, μέτρου:

$$\upsilon_A = \omega_2 \cdot \frac{\ell}{2} = 6 \cdot 1m/s = 6m/s$$

γ) Με αντικατάσταση στην σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 rad = 9rad$$

dmargaris@gmail.com