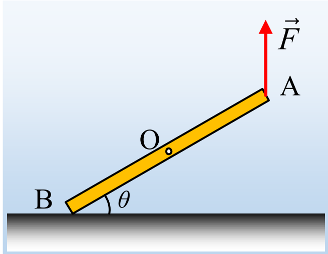
Η ανύψωση μιας σανίδας.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια λεπτή ομογενής σανίδα ΑΒ μήκους 2m και μάζας 3kg. Σε μια στιγμή t=0 στο άκρο Α τη δοκού, ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω, σταθερού μέτρου F=20Ν. Μετά από λίγο τη στιγμή t_1, η σανίδα έχει ανασηκωθεί, όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8.



i) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στη σανίδα μέσω του έργου της δύναμης F, κατά το παραπάνω διάστημα;

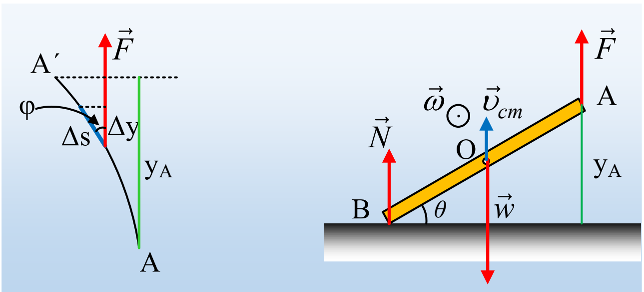
ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο και η γωνιακή ταχύτητα της σανίδας τη στιγμή t_1;

iii) Ποια η ισχύς της δύναμης F τη στιγμή t_1;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς δοκού ως προς άξονα κάθετο που περνά από το μέσον της I_{cm}= $M\ell^2/12$, $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Με βάση το πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, η τροχιά του σημείου εφαρμογής της δύναμης (σημείο Α) είναι καμπυλόγραμμη. Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης, αρκεί να εφαρμόσουμε τον ορισμό του έργου δύναμης W=F·Δs·συνφ=F·(Δsσυνφ)=F·Δy, όπου Δs·συνφ η προβολή της μετατόπισης στην διεύθυνση της δύναμης.



Αλλά τότε αν χωρίσουμε την καμπύλη τροχιά σε στοιχειώδεις μετατοπίσεις Δs_1, Δs_2… Δs_ν το συνολικό έργο της δύναμης θα είναι:

$$W_F = F\cdot \Delta s_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + F\cdot \Delta s_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \ldots + F\cdot \Delta s_\nu \sigma\upsilon\nu\varphi_\nu \rightarrow$$
$$W_F = F\cdot\left(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_\nu\right) = F\cdot y_A$$

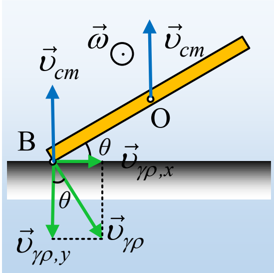
Όμως με βάση το δεύτερο σχήμα, για την κατακόρυφη απόσταση y_A, έχουμε $y_A=\ell\cdot\eta\mu\theta$, οπότε:

$$W_F = F\cdot y_A = F\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta = 20\cdot 2\cdot 0{,}6 J = 24J$$

ii) Με βάση τις δυνάμεις που ασκούνται στην σανίδα, όλες κατακόρυφες, καταλαβαίνουμε ότι το κέντρο μάζας Ο έχει κατακόρυφη ταχύτητα υ_{cm}, ενώ ταυτόχρονα η σανίδα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, όπως στο παραπάνω σχήμα. Αλλά τότε το κέντρο μάζας Ο, έχει ανυψωθεί κατά y_o= ½ y_A και η ενέργεια που μεταφέρθηκε στη σανίδα, μέσω του παραπάνω έργου της δύναμης F, θα είναι ίσο με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας της σανίδας. Δηλαδή, αν $U_{\alpha\rho}=0$, θα έχουμε:

$$K_1 + U_1 = W_F \rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + Mgy_o = W_F \quad (1)$$

Όπου $y_o = \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta = \frac{2}{2}\cdot 0{,}6m = 0{,}6m$



Αν εστιάσουμε τώρα στην ταχύτητα του άκρου Β, που βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, αυτό θα έχει μια ταχύτητα ίση με υ_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot ½\ \ell$, λόγω περιστροφής γύρω από το Ο. Αλλά το Β δεν κινείται κατακόρυφα, οπότε $\upsilon_y=0$ οπότε:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho,y} \rightarrow \upsilon_{cm} = \omega\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \quad (2)$$

Και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

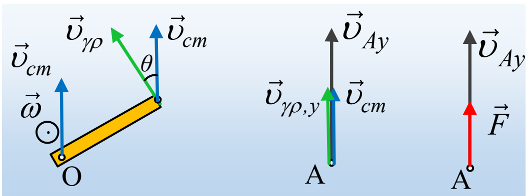
$$\frac{1}{2}M\left(\omega\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}M\ell^2\omega^2 + Mgy_o = W_F \quad \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{24\left(W_F - Mgy_o\right)}{M\ell^2\left(3\sigma\upsilon\nu^2\theta + 1\right)}} = \sqrt{\frac{24\cdot\left(24 - 3\cdot 10\cdot 0{,}6\right)}{3\cdot 2^2\left(3\cdot 0{,}8^2 + 1\right)}}rad/s = 2rad/s$$

Οπότε από την (2) βρίσκουμε και:

$$\upsilon_{cm} = \omega\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 2\cdot\frac{2}{2}\cdot 0{,}8m/s = 1{,}6m/s$$

iii) Ερχόμαστε τώρα στο άκρο Α, το σημείο εφαρμογής της δύναμης F.



Η ισχύς της δύναμης την στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$P_F = F\upsilon_A\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = F\cdot\upsilon_{Ay}$$

Όπου υ_{Ay} η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του σημείου εφαρμογής της δύναμης, δηλαδή η συνιστώσα στην διεύθυνση της δύναμης. Αλλά με βάση του σχήμα:

$$\upsilon_{Ay} = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \upsilon_{cm} + \omega\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$\upsilon_{Ay} = 1{,}6m/s + 2\cdot\frac{2}{2}\cdot 0{,}8m/s = 3{,}2m/s \Rightarrow$$

$$P_F = F\cdot\upsilon_{Ay} = 20\cdot 3{,}2W = 64W$$

dmargaris@gmail.com