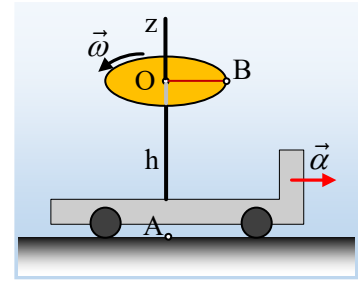


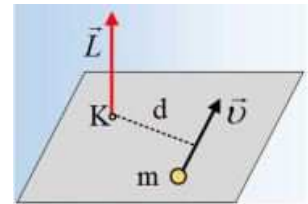
Γύρω από επιταχυνόμενο άξονα

Ένας ομογενής δίσκος, κέντρου O , μάζας $m=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα z , ο οποίος στηρίζεται σε αμαξίδιο που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Θέτουμε τον δίσκο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\text{rad/s}$ και στη συνέχεια κάποια στιγμή $t_0=0$ το αμαξίδιο τίθεται σε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\alpha=1\text{m/s}^2$. Το κέντρο O του δίσκου βρίσκεται σε ύψος $(AO)=h=2\text{m}$ από το έδαφος. Για τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ να βρεθούν.



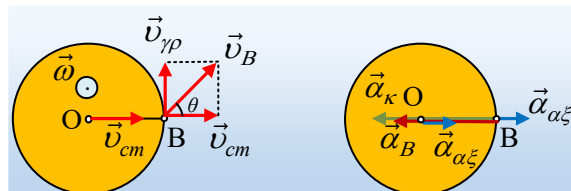
- i) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σημείου B , στο άκρο μιας ακτίνας (OB) του δίσκου, παράλληλης με την ταχύτητα του αμαξιδίου.
- ii) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου ως προς το σημείο A του εδάφους.

Δίνεται ότι ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται με ταχύτητα v , παρουσιάζει ως προς ένα τυχαίο σημείο K , στροφορμή μέτρου $L=mv \cdot d$, όπου d η απόσταση του σημείου K από τον φορέα της δύναμης, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$.



Απάντηση:

- i) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα έχουν σημειωθεί οι ταχύτητες και στο δεύτερο οι επιταχύνσεις του κέντρου O και του σημείου B , σε κάτοψη.



Τη στιγμή t_1 το αμαξίδιο έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$v = \alpha t_1 = 1 \cdot 2\text{m/s} = 2\text{m/s}$$

Ίδια προφανώς θα είναι και η ταχύτητα του άξονα z και ίδια η ταχύτητα v_{cm} του κέντρου O του δίσκου.

Αλλά τότε το σημείο B , έχει ταχύτητα ίση με v_{cm} , εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του δίσκου και γραμμική ταχύτητα, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης, γύρω από το O , με μέτρο:

$$v_{\gamma p} = \omega R = 2 \cdot 1\text{m/s} = 2\text{m/s}$$

Οπότε η ταχύτητα του σημείου B έχει μέτρο:

$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2}\text{m/s} = 2\sqrt{2}\text{m/s}$$

Η οποία σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με την κατεύθυνση της ταχύτητα του αμαξιδίου, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο.

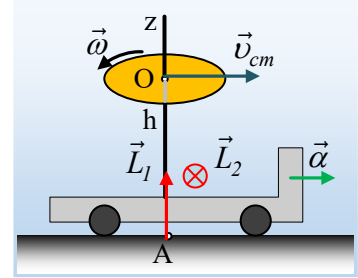
Εξάλλου το σημείο B έχει επιτάχυνση, ίση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας, άρα την επιτάχυνση του άξονα a και κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το O, μέτρου:

$$\alpha_K = \omega^2 R = 2^2 \cdot 1m / s^2 = 4m / s^2.$$

Αλλά τότε η συνολική του επιτάχυνση κατευθύνεται προς το κέντρο O του δίσκου, με μέτρο:

$$\alpha_B = \alpha_K - \alpha_{\alpha\xi} = \alpha_K - \alpha = 4m / s^2 - 1m / s^2 = 3m / s^2.$$

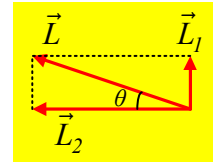
ii) Ο δίσκος ως προς το σημείο A, παρουσιάζει μια στροφορμή L_1 , κατακόρυφη, πάνω στον άξονα z, λόγω ιδιοπεριστροφής και μια οριζόντια στροφορμή L_2 , κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, εξαιτίας της κίνησης του κέντρου μάζας O, με ταχύτητα v. Για τα μέτρα τους έχουμε:



$$L_1 = I_{cm} \cdot \omega = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

$$L_2 = m v_{cm} \cdot r = m v_{cm} \cdot h = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}.$$

Συνεπώς η ολική στροφορμή, ως προς το σημείο A του εδάφους, στη βάση του άξονα z, θα προκύψει από την σύνθεση των παραπάνω διανυσμάτων, με βάση το διπλανό σχήμα:



$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = \sqrt{68} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 2\sqrt{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}.$$

$$\text{Ενώ } \varepsilon\varphi\theta = \frac{L_1}{L_2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

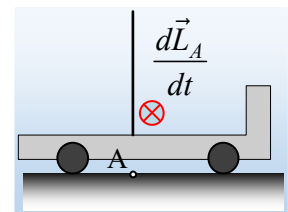
Όπου θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της στροφορμής με την οριζόντια διεύθυνση (η στροφορμή βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας...)

Όσον αφορά τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

Αφού παρατηρήσουμε ότι η στροφορμή L_1 παραμένει σταθερή (σταθερή γω-

νιακή ταχύτητα ω...), συνεπώς $\frac{d\vec{L}_1}{dt} = 0$, ενώ:



$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{d(mvr)}{dt} = m \frac{dv}{dt} h = ma \cdot h = 2 \cdot 1 \cdot 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2.$$

Συνεπώς ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το A, έχει μέτρο $\frac{dL_A}{dt} = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$,

ενώ είναι διάνυσμα οριζόντιο, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com

