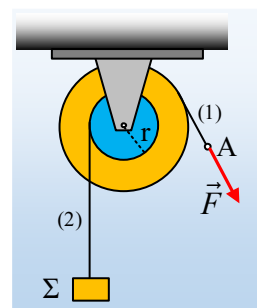


## Τα έργα και οι ενέργειες σε ένα σύστημα

Η συμπαγής και ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα  $M=20\text{kg}$ , ακτίνα  $R=0,2\text{m}$  και φέρει ομόκεντρη κυκλική προεξοχή ακτίνας  $r=0,1\text{m}$ . Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει ένα νήμα αμελητέας μάζας (1), στο άκρο A του οποίου μπορούμε να ασκούμε μια δύναμη  $F$ , ενώ γύρω από την προεξοχή έχουμε τυλίξει ένα δεύτερο αβαρές νήμα (2), στο άκρο του οποίου κρέμεται ένα σώμα  $\Sigma$ . Σε μια στιγμή  $t_0=0$  αφήνουμε ελεύθερο το σώμα  $\Sigma$ , ενώ ταυτόχρονα ασκούμε σταθερή δύναμη  $F=34\text{N}$ , στο άκρο A του πρώτου νήματος, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή  $t_1$  το άκρο A του νήματος έχει ταχύτητα  $v_A=0,8\text{m/s}$ , ενώ η τροχαλία έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\theta=2\text{rad}$ .



- i) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης  $F$ , μέχρι τη στιγμή  $t_1$ , καθώς και η ισχύς της δύναμης την στιγμή  $t_1$ .
- ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια της τροχαλίας την στιγμή  $t_1$ ;
- iii) Να βρεθεί η ενέργεια που μεταφέρεται μέσω του νήματος, από την τροχαλία στο σώμα  $\Sigma$ .
- iv) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος  $\Sigma$ .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της  $I = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

### Απάντηση:

- i) Η δύναμη  $F$ , μέσω του νήματος, μεταφέρεται στην τροχαλία, στο σημείο B, ασκώντας ροπή ως προς τον άξονά της, μέτρου  $\tau=FR$ , οπότε το έργο της για περιστροφή κατά  $\theta$  της τροχαλίας, θα είναι:

$$W_F = \tau \cdot \theta = FR \cdot \theta = 34 \cdot 0,2 \cdot 2\text{J} = 13,6\text{J}$$

Ενώ η αντίστοιχη ισχύς της δύναμης την στιγμή  $t_1$  είναι ίση:

$$P_{F_1} = F \cdot v_B = F \cdot v_A = 34 \cdot 0,8\text{W} = 27,2\text{W}$$

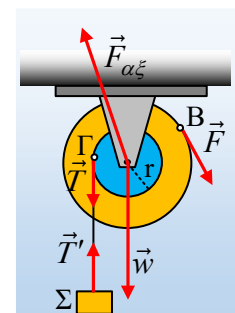
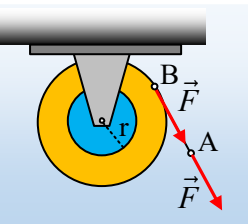
- ii) Για την γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  της τροχαλίας την στιγμή  $t_1$  έχουμε:

$$v_B = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v_B}{R} = \frac{v_A}{R} = \frac{0,8}{0,2}\text{rad/s} = 4\text{rad/s}$$

Συνεπώς η τροχαλία θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_I = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 0,2^2 \cdot 4^2\text{J} = 3,2\text{J}$$

- iii) Αν μέσω του έργου της δύναμης μεταφέρθηκε στην τροχαλία ενέργεια  $13,6\text{J}$  και αυτή έχει ενέργεια  $3,2\text{J}$ , τότε η διαφορά ενέργειας  $13,6\text{J}-3,2\text{J}=10,4\text{J}$  μεταφέρεται στο σώμα  $\Sigma$ , μέσω του νήματος (2) που το συνδέει με την τροχαλία. Ισοδύναμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ΘΜΚΕ για την τροχαλία, λαμβάνοντας υπόψη ότι έργο παράγουν μόνο η δύναμη  $F$  και η τάση  $T$  του νήματος (2):



$$K_I - K_0 = W_F + W_T \rightarrow W_T = K_I - W_F \rightarrow$$

$$W_T = 3,2J - 13,6J = -10,2J$$

Το παραπάνω έργο μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται μέσω του έργου της  $T'$ , με την βοήθεια του κατακόρυφου νήματος, από την τροχαλία στο σώμα  $\Sigma$ .

iv) Η παραπάνω ενέργεια των  $10,2J$  προκάλεσε αύξηση της ενέργειας του σώματος  $\Sigma$ , η οποία κατά ένα μέρος αυξάνει την δυναμική του ενέργεια, ενώ το υπόλοιπο εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια. Αν λοιπόν το  $\Sigma$  ανέβη κατά  $h$ , και έχει ταχύτητα  $v_1$ , τότε θα έχουμε:

$$W_{T'} = \Delta E_{\Sigma} = \Delta U + \Delta K \rightarrow W_{T'} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (1)$$

Αλλά το σώμα  $\Sigma$  ανέρχεται όσο και το μήκος του νήματος (2) που μαζεύεται:

$$h = \Delta \ell_2 = \theta \cdot r = 2 \cdot 0,1m = 0,2m$$

Ενώ η ταχύτητα  $v_1$  του σώματος  $\Sigma$ , είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου  $\Gamma$  της τροχαλίας:

$$v_1 = v_{\gamma\rho,\Gamma} = \omega \cdot r = 4 \cdot 0,1m / s = 0,4m / s$$

Οπότε με αντικατάσταση στην σχέση (1) βρίσκουμε:

$$W_{T'} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow m = \frac{W_{T'}}{gh + \frac{1}{2}v_1^2} \rightarrow$$

$$m = \frac{10,2}{10 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,4^2} kg = 5kg$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)