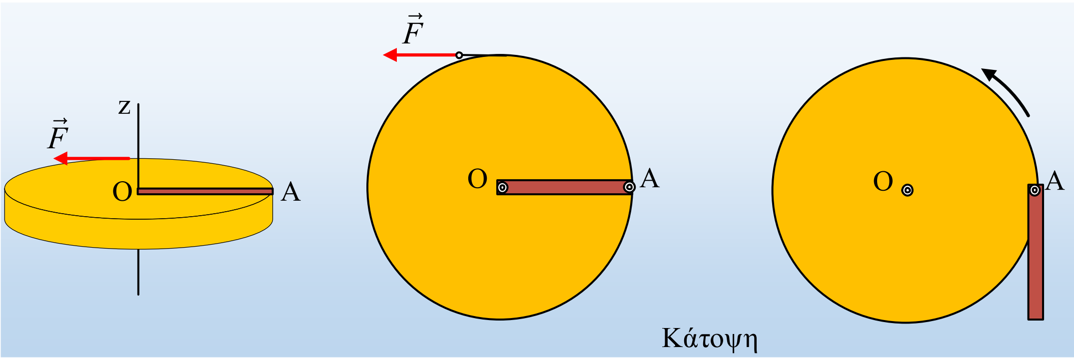
Ο δίσκος και η ράβδος στρέφονται

Ένας ομογενής δίσκος μάζας M=10kg και ακτίνας R=1m μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο. Μια ομογενής ράβδος ΟΑ, μήκους ℓ=R και μάζας m=3kg έχει το ένα της άκρο στερεωμένο στον άξονα και το άλλο της άκρο Α, έχει καρφωθεί στο άκρο μιας ακτίνας του δίσκου. Το σύστημα ηρεμεί, ενώ γύρω από τον δίσκο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου, τη στιγμή t=0, ασκούμε μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=12N, με αποτέλεσμα το νήμα να ξετυλίγεται και το σύστημα να τίθεται σε περιστροφή.



i) Την χρονική στιγμή t_1=1,5s, να βρεθούν:

α) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα z.

β) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

ii) Τη στιγμή t_2=3s η δύναμη F παύει να ασκείται και μετά από λίγο, η ράβδος ελευθερώνεται από τον άξονα, οπότε στρέφεται γύρω από το άκρο της Α και καταλήγει να καταστεί μόνιμα εφαπτόμενη στον δίσκο, όπως στο τρίτο σχήμα. Να υπολογιστούν

α) Η τελική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

β) Η μεταβολή της στροφορμής της ράβδου, ως προς τον άξονα z, που οφείλεται στην απελευθέρωσή της από τον άξονα.

γ) Η αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας δίσκου και ράβδου ως προς κάθετους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους I_δ= ½ MR^2 και I_ρ= ml^2/12.

Απάντηση:

i) Το σύστημα αποτελεί ταυτόχρονα και ένα στερεό s_1 με ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα περιστροφής:

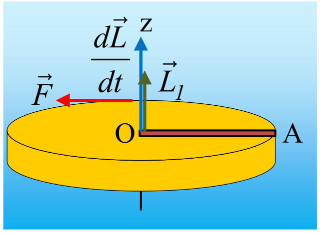
$$I_1 = I_\delta + I_\rho = \frac{1}{2}MR^2 + \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mR^2 \rightarrow$$

$$I_1 = \frac{1}{2}10\cdot 1^2\ kgm^2 = \frac{1}{3}3\cdot 1^2\ kgm^2 = 6\ kgm^2.$$

α) Η μόνη εξωτερική δύναμη που εμφανίζει ροπή ως προς τον άξονα z, είναι η δύναμη F, η οποία προκαλεί σταθερό ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του στερεού s_1:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = FR = 12 \cdot 1\ kgm^2 / s^2 = 12\ kgm^2 / s^2.$$

Ο ρυθμός αυτός παραμένει σταθερός, οπότε για το διάστημα 0-1,5s έχουμε:



$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{dL}{dt} \to L_1 = \left(\frac{dL}{dt}\right)t_1 \to$$

$$L_1 = 12\ kgm^2 / s^2 \cdot 1{,}5s = 18\ kgm^2 / s.$$

Στο σχήμα έχουν σημειωθεί τα δύο παραπάνω διανύσματα.

β) Η παραπάνω στροφορμή την στιγμή t_1 του στερεού συνδέεται με την γωνιακή ταχύτητα:

$$L_1 = I_1\omega_1 \to \omega_1 = \frac{L_1}{I_1} = \frac{18}{6} rad / s = 3rad / s$$

Οπότε το στερεό έχει την στιγμή t_1 κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 3^2\ J = 27J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο στερεό μέσω του έργου της δύναμης F (ή ισοδύναμα της ροπής της δύναμης).

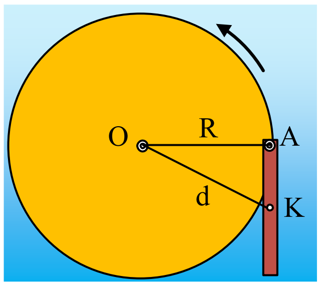
$$\frac{dK_1}{dt} = P_F = \tau\omega_1 = (FR) \cdot \omega_1 = 12 \cdot 1 \cdot 3J / s = 36\ J / s$$

ii) Τη στιγμή που παύει η άσκηση της δύναμης F, το στερεό s_1 έχει γωνιακή ταχύτητα ω_2, όπου:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau \to \frac{I_1\omega_2 - 0}{t_2 - 0} = FR \to \omega_2 = \frac{FRt_2}{I_1} \to$$

$$\omega_2 = \frac{12 \cdot 1 \cdot 3}{6}\ rad/s = 6rad / s.$$

Με την μεταφορά της ράβδου σε διεύθυνση εφαπτομενική του δίσκου, έχουμε πλέον ένα νέο στερεό s_2, με ροπή αδράνειας:



$$I_2 = I_\delta + I'_\rho = \frac{1}{2} MR^2 + \left(\frac{1}{12} m\ell^2 + md^2\right),\ \text{όπου}$$

$$d^2 = R^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 1^2 m^2 + \frac{1}{4} m^2 = \frac{5}{4} m^2 \to$$

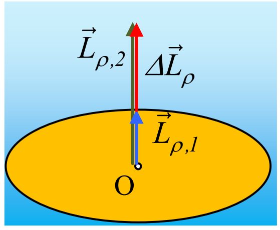
$$I_2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 1^2\ kgm^2 + \left(\frac{1}{12} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot \frac{5}{4}\right) kgm^2 = 9kgm^2.$$

α) Στη διάρκεια της μετακίνησης της ράβδου δεν ασκείται στο σύστημα κάποια εξωτερική ροπή, συνεπώς η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετ} \rightarrow I_1\omega_2 = I_2\omega_3 \rightarrow$$

$$\omega_3 = \frac{I_1\omega_2}{I_2} = \frac{6\cdot 6}{9} rad/s = 4 rad/s$$

β) Στην διάρκεια της παραπάνω μετακίνησης της ράβδου η στροφορμή της μεταβάλλεται κατά $\Delta\vec{L}_\rho = \vec{L}_{\rho,2} - \vec{L}_{\rho,1}$, όπου με βάση και το διπλανό σχήμα, αφού τα δύο διανύσματα βρίσκονται πάνω στον άξονα z, θα έχουμε και η μεταβολή της στροφορμής να βρίσκεται πάνω στον άξονα με φορά προς τα πάνω και μέτρο:



$$\Delta L_\rho = L'_\rho - L_\rho = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + md^2\right)\cdot\omega_3 - \frac{1}{3}m\ell^2\cdot\omega_2 \rightarrow$$

$$\Delta L_\rho = 3\cdot\left(\frac{1}{12}1^2 + \frac{5}{4}\right)\cdot 4\ kgm^2/s - \frac{1}{3}3\cdot 1^2\cdot 6\ kgm^2/s = 10\ kgm^2/s.$$

γ) Για την μεταβολή τη κινητικής ενέργειας του συστήματος, έχουμε:

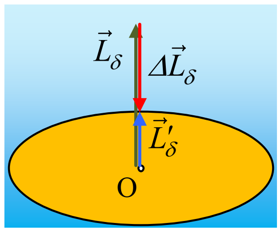
$$\Delta K = K_{\sigma,\tau\varepsilon\lambda} - K_{\sigma,\alpha\rho\chi} = K_{s_2} - K_{s_1} = \frac{1}{2}I_2\cdot\omega_3^2 - \frac{1}{2}I_1\cdot\omega_2^2 \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 4^2 J - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6^2 J = -36J$$

Αποτέλεσμα που μας λέει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώθηκε κατά την αλλαγή της θέσης της ράβδου.

Σχόλιο:

Η στροφορμή της ράβδου κατά την μετακίνησή της αυξήθηκε, οπότε αφού έχουμε διατήρηση στροφορμής, σημαίνει ότι ισόποσα μειώθηκε η στροφορμή, ως προς τον άξονα z, του δίσκου. Πράγματι για τον δίσκο:



$$\Delta L_\delta = I'_\delta - I_\delta = \frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_3 - \frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_2 \rightarrow$$

$$\Delta L_\rho = \frac{1}{2}10\cdot 1^2\cdot(4-6)\ kgm^2/s = -10\ kgm^2/s.$$

dmargaris@gmail.com