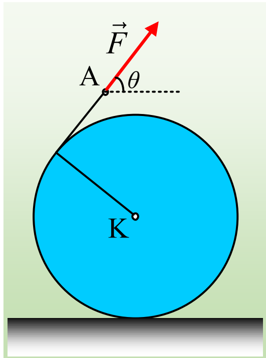
Μια κύλιση με την επίδραση πλάγιας δύναμης



Ένας μικρός ομογενής κύλινδρος μάζας m=4kg, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε τη στιγμή $t_0=0$, μια σταθερή δύναμη μέτρου F=4N, η οποία σχηματίζει διαρκώς γωνία θ=60° με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Το αποτέλεσμα είναι ο κύλινδρος να κυλίεται πάνω στο επίπεδο.

i) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο δεν μπορεί να είναι λείο.

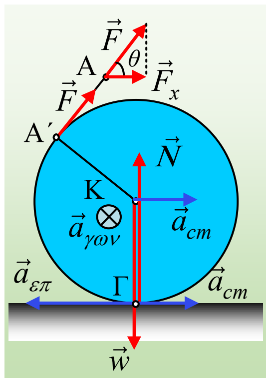
ii) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου Κ, καθώς και την τριβή που ασκείται πάνω του.

iii) Να βρεθεί την χρονική στιγμή t_1=4s η ταχύτητα και η επιτάχυνση του άκρου Α του νήματος στη διεύθυνση της δύναμης F.

iv) Πόσο είναι το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται, μέχρι τη στιγμή t_1 και ποια η μετατόπιση του άκρου Α του νήματος, στη διεύθυνση της δύναμης F;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του I_{cm}= ½ mR^2, καθώς και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των 60°.

Απάντηση:



i) Έστω ότι το επίπεδο είναι λείο. Μέσω του νήματος η ασκούμενη δύναμη F, μεταφέρεται στο σημείο Α΄ στο άκρο μιας ακτίνας, οπότε αυτή ασκείται εφαπτομενικά στον κύλινδρο, όπως στο σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική, γύρω από άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο Κ του κυλίνδρου, εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, δουλεύοντας με μέτρα των μεγεθών:

Μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm} \to F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = ma_{cm} \to$$

$$a_{cm} = \frac{F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{m} = \frac{4\cdot 0,5}{4}m/s^2 = 0,5m/s^2.$$

Στροφική κίνηση:

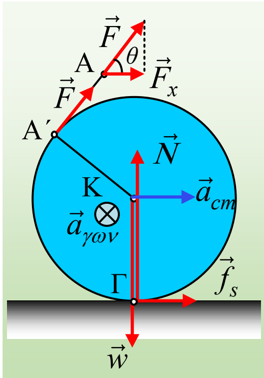
$$\Sigma\tau_K = I_{cm}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \to FR = \frac{1}{2}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \to$$

$$R\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{m} = \frac{2\cdot 4}{4}m/s^2 = 2m/s^2.$$

Ερχόμαστε τώρα στο σημείο Γ, επαφής του κυλίνδρου με το οριζόντιο επίπεδο. Το σημείο αυτό θα αποκτήσει μια επιτάχυνση ίση με $α_{cm}$ λόγω μεταφορικής κίνησης και μια $α_{επ}=α_{γων}R$ εξαιτίας της στροφικής κίνησης του κυλίνδρου. Αλλά τότε το σημείο Γ έχει επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\alpha_\Gamma = \alpha_{\varepsilon\pi} - a_{cm} = R\cdot a_{\gamma\omega\nu} - a_{cm} = 2m/s^2 - 0,5m/s^2 = 1,5m/s^2.$$

Πράγμα που σημαίνει ότι ο κύλινδρος ολισθαίνει (σπινάρει) και δεν κυλίεται. Άρα η υπόθεσή μας ότι το επίπεδο είναι λείο, οδηγήθηκε σε άτοπο, το επίπεδο δεν μπορεί να είναι λείο και να έχουμε κύλιση.



ii) Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, για να υπάρξει κύλιση απαιτείται να μηδενιστεί η επιτάχυνση του σημείου Γ, πράγμα που μπορεί να συμβεί αν αυξηθεί η α_{cm} και μειωθεί η $\alpha_{\varepsilon\pi}$. Για να συμβεί αυτό αρκεί να ασκηθεί στον κύλινδρο δύναμη στατικής τριβής f_s, όπως στο σχήμα. Οπότε εφαρμόζουμε ξανά το 2^o νόμο του Νεύτωνα για μεταφορική και στροφική κίνηση, παίρνοντας:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm} \rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + f_s = ma_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_K = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow FR - f_s R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$F - f_s = \frac{1}{2} mR \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά από την συνθήκη κύλισης $\upsilon_{cm}=\omega R$ παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow \alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3)$$

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2), λαμβάνοντας υπόψη την (3), παίρνουμε:

$$F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + f_s + F - f_s = ma_{cm} + \frac{1}{2} ma_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{2F(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{3m} = \frac{2 \cdot 4(1+0,5)}{3 \cdot 4} m/s^2 = 1m/s^2.$$

Ενώ με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε:

$$f_s = ma_{cm} - F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 4 \cdot 1N - 4 \cdot 0,5N = 2N$$

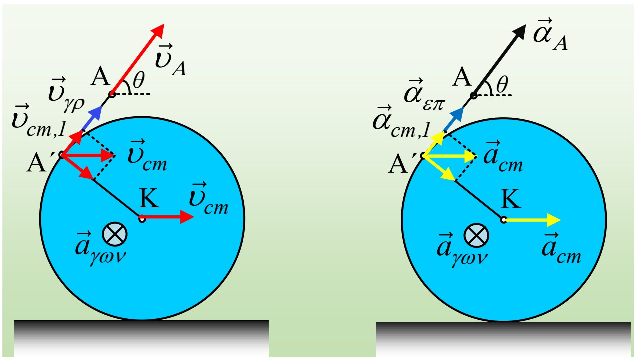
iii) Για την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του κέντρου μάζας ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} t \quad \kappa\alpha\iota \quad x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$

Συνεπώς τη στιγμή t_1=4s, το κέντρο Κ έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} t_1 = 1 \cdot 4m/s = 4m/s$$

Το άκρο Α του νήματος, έχει την ίδια ταχύτητα με το σημείο Α΄ του κυλίνδρου, στη διεύθυνση του νήματος, το οποίο έχει την ταχύτητα $\upsilon_{cm,1}$ (προβολή της υ_{cm}), λόγω μεταφορικής κίνησης και $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_{cm}$=4m/s εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Κ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αλλά τότε για την ταχύτητα του Α παίρνουμε:

$$\upsilon_A = \upsilon'_A = \upsilon_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \upsilon_{\gamma\rho} = 4m/s \cdot 0,5 + 4m/s = 6m/s$$

Όμοια η επιτάχυνση του άκρου Α, είναι ίδια με την ***εφαπτομενική*** επιτάχυνση του σημείου Α΄(το Α΄ έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία δεν μας ενδιαφέρει εδώ), για την οποία με βάση το δεύτερο από τα παραπάνω σχήματα είναι ίση:

$$\alpha_A = \alpha_{A',\varepsilon\varphi} = \alpha_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \alpha_{\gamma\omega\nu} R \xrightarrow{\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R}$$
$$\alpha_A = 1 \cdot 0,5m/s^2 + 1m/s^2 = 1,5m/s^2.$$

iv) Ο κύλινδρος κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, οπότε κατ΄ αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την γωνία στροφής θα έχουμε:

$$\varphi = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2$$

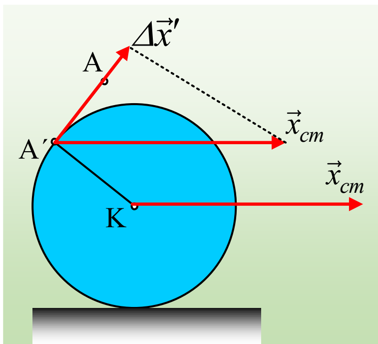
Αλλά τότε το νήμα που ξετυλίγεται θα έχει μήκος:

$$\Delta\ell = \varphi R = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 \cdot R = \frac{1}{2}(a_{\gamma\omega\nu} R)t^2 = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \rightarrow$$
$$\Delta\ell = \frac{1}{2} 1 \cdot 4^2 m = 8m$$

Ενώ για την μετατόπιση του σημείου Α στην κατεύθυνση της δύναμης, θα έχουμε:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 4^2 m = 12m$$

Σχόλιο:



Το κέντρο μάζας Κ, μέχρι τη στιγμή t_1 μετατοπίζεται κατά:

$$x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 4^2 m = 8m$$

Την ίδια μετατόπιση παρουσιάζει και το σημείο Α΄ λόγω μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου, οπότε αναλύοντάς την σε δύο συνιστώσες, το Α΄ μετατοπίζεται στην διεύθυνση της δύναμης κατά:

$$\Delta x' = x_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 8 \cdot 0,5m = 4m$$

Και συνολικά, λόγω σύνθετης κίνησης κατά:

$$x_A = \Delta x' + \Delta\ell = 4m + 8m = 12m$$

dmargaris@gmail.com