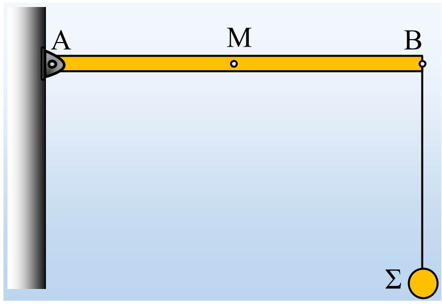
Με αβαρές νήμα ή αβαρή ράβδο



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους l=4m και μάζας M=15kg μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από άρθρωση στο άκρο της Α και συγκρατείται σε οριζόντια θέση, ενώ μέσω αβαρούς νήματος μήκους l_1=3m, κρέμεται από το άκρο της Β, ένα σώμα Σ μάζας m=0,8kg, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων.

i) Σε μια στιγμή t=0, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Αφού εξετάσετε αν το νήμα παραμένει τεντωμένο ή όχι, να υπολογιστούν, αμέσως μετά (για $t=0^+$), οι αρχικές τιμές:

α) της επιτάχυνσης του μέσου Μ της ράβδου.

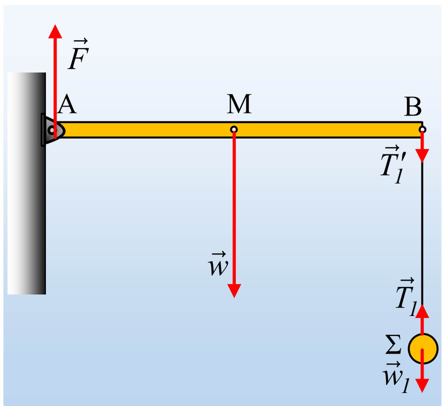
β) Της επιτάχυνσης του σώματος Σ.

γ) Τη δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση στο άκρο της Α.

ii) Αντικαθιστούμε το νήμα με αβαρή ράβδο, του ίδιου μήκους, στο κάτω άκρο της οποίας προσδένεται το σώμα Σ, κατασκευάζοντας το στερεό s, ενώ συγκρατούμε τη ράβδο ΑΒ ξανά σε οριζόντια θέση. Να βρεθεί η επιτάχυνση του μέσου Μ της ράβδου καθώς και η επιτάχυνση του σώματος Σ, αμέσως μόλις το στερεό μας αφεθεί να κινηθεί.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς την άρθρωση στο Α, $I= Ml^2/3$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ράβδο και σώμα Σ, όπου Τ και Τ΄ η τάση του νήματος, που ασκείται στα δυο σώματα, ίδιου μέτρου, αφού το νήμα έχει αμελητέα μάζα (αβαρές). Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της ράβδου και για την κίνηση του υλικού σημείου Σ και παίρνουμε (δουλεύουμε με μέτρα):

$$\Sigma\tau_A = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to Mg \cdot \frac{\ell}{2} + T' \cdot \ell = \frac{1}{3} M\ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \to$$

$$\frac{1}{2} Mg + T' = \frac{1}{3} M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

$$\Sigma F_\Sigma = ma_1 \to mg - T_1 = ma_1 \quad (2)$$

Τι συμβαίνει με το νήμα; Συνεχίζει να είναι τεντωμένο και να ασκεί τις δυνάμεις που έχουμε σημειώσει; Δεν γνωρίζουμε, οπότε υποθέτουμε ότι πράγματι αυτό συμβαίνει. Τότε κάθε σημείο του νήματος έχει την ίδια επιτάχυνση, συνεπώς η επιτάχυνση του σώματος Σ θα είναι ίση και με την επιτάχυνση του άκρου Β της ράβδου, δηλαδή θα ισχύει:

$$\alpha_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell \quad (3)$$

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2), με την βοήθεια της σχέσης (3) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}Mg + T' + mg - T = \frac{1}{3}M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} + m \cdot \ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

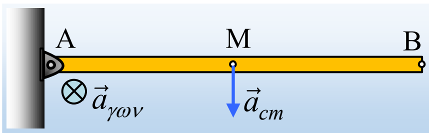
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)g}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)\ell} = \frac{\left(\frac{1}{2}15 + 0{,}8\right)\cdot 10}{\left(\frac{1}{3}15 + 0{,}8\right)\cdot 4} rad/s^2 \approx 3{,}6 rad/s^2$$

Αλλά τότε με αντικατάσταση στην (2) (ή και στην (1)…) παίρνουμε:

$$mg - T_1 = ma_1 \quad \rightarrow T_1 = m\left(g - a_{\gamma\omega\nu}\cdot \ell\right) = m\left(10 - 3{,}6\cdot 4\right) < 0$$

Πράγμα άτοπο, αφού ένα νήμα δεν μπορεί να σπρώξει το σώμα Σ! Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι το νήμα συνεχίζει να είναι τεντωμένο και να ασκεί δύναμη στα σώματα δεν ισχύει.

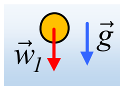
α) Αλλά αν δεν υπάρχει τάση νήματος, τότε η ράβδος στρέφεται μήνη της και παίρνοντας τώρα την εξίσωση (1) με T΄=0 θα έχουμε:



$$\frac{1}{2}Mg = \frac{1}{3}M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} \rightarrow$$

$$a_M = a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{2\ell}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{4} = 7{,}5 m/s^2.$$

β) Αφού μηδενίζεται η τάση του νήματος, η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ είναι το βάρος, οπότε πέφτει «ελεύθερα» με επιτάχυνση g=10m/s^2.



γ) Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας Μ της ράβδου, παίρνουμε:

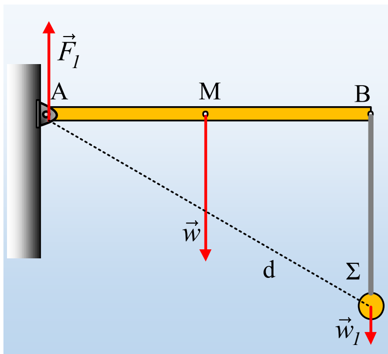
$$\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm} \rightarrow \vec{F} + \vec{w} = M\vec{a}_{cm}$$

Αλλά αφού το βάρος και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Μ είναι κατακόρυφα διανύσματα και η δύναμη από την άρθρωση F θα είναι επίσης κατακόρυφη και η παραπάνω εξίσωση γίνεται(θετική φορά προς τα κάτω):

$$F + Mg = Ma_{cm} \rightarrow F = M\left(-g + a_{cm}\right) = 15\left(-10 + 7{,}5\right)N = -37{,}5N$$

Το (-) σημαίνει ότι η δύναμη από τον άξονα έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

ii) Αντικαθιστώντας το αβαρές νήμα με αβαρή ράβδο, δημιουργούμε ένα νέο στερεό S, το οποίο πρόκειται να περιστραφεί σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από την άρθρωση στο Α. Για την ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα στο Α, έχουμε:



$$I_s = I_\rho + I_\Sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + md^2 = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\ell^2 + \ell_1^2\right) \rightarrow$$

$$I_s = \frac{1}{3}15 \cdot 4^2\, kg \cdot m^2 + 0,8\left(4^2 + 3^2\right) kg \cdot m^2 \rightarrow$$
$$I_s = 80 kg \cdot m^2 + 0,8 \cdot 25 kg \cdot m^2 = 100 kg \cdot m^2.$$

Εφαρμόζουμε το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση του S και παίρνουμε (δουλεύουμε με μέτρα):

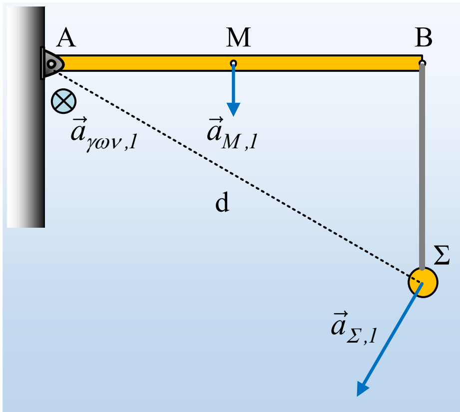
$$\Sigma\tau_A = I_S \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow M g \cdot \frac{\ell}{2} + mg \cdot \ell = I_S \cdot a_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow$$
$$a_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 2 + 0,8 \cdot 10 \cdot 4}{100} rad / s^2 = 3,32 rad / s^2.$$

Το μέσον Μ της σανίδας έχει (επιτρόχια) επιτάχυνση, κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{M,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot \frac{\ell}{2} = 3,32 \cdot \frac{4}{2} m / s^2 = 6,64 m / s^2.$$

Με την ίδια λογική, το υλικό σημείο Σ, έχει επιτάχυνση κάθετη στην ακτίνα d (ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του γύρω από το Α), με μέτρο:

$$\alpha_{\Sigma,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot d = 3,32 \cdot 5 m / s^2 = 16,6 m / s^2.$$



dmargaris@gmail.com