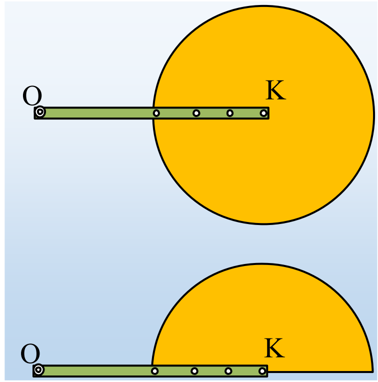
Και αν πάρουμε το μισό δίσκο;



Διαθέτουμε ένα στερεό το οποίο αποτελείται από μια ομογενή ράβδο ΟΚ, μήκους l=2m και μάζας m=15kg, και, έναν ομογενή δίσκο μάζας M=40kg και ακτίνας R=1m απόλυτα συνδεδεμένο με τη ράβδο, με το άκρο Κ της ράβδου να είναι και το κέντρο του δίσκου. Το στερεό S μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο Ο της ράβδου, ενώ συγκρατείται με την ράβδο σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα.

i) Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το στερεό να περιστραφεί.

α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα περιστροφής.

β) Να υπολογιστεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού S, καθώς και η επιτάχυνση του κέντρου Κ του δίσκου.

ii) Κόβουμε και απομακρύνουμε τον μισό δίσκο, οπότε παίρνουμε το στερεό S_1, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα.

α) Στηριζόμενοι στον ορισμό της ροπής αδράνειας, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας I_1 του στερεού S_1, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο, εκμεταλλευόμενοι την ροπή αδράνειας του στερεού S.

β) Αν αφήσουμε το στερεό S_1 να κινηθεί ξανά, από την θέση που η ράβδος είναι οριζόντια, να υπολογιστούν η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού και η αρχική επιτάχυνση του σημείου Κ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς δίσκου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του $I_1=1/2\ MR^2$ και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας για την ομογενή ράβδο $I_2= ml^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού προκύπτει ως άθροισμα των γινομένων $m_i r_i^2$ κάθε στοιχειώδους μάζας, μπορούμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας του στερεού S, ως άθροισμα δύο ροπών αδράνειας, ράβδου και δίσκου:

α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα Steiner για κάθε στερεό, ως προς τον άξονα στο Ο, παίρνουμε:

$$I_\rho = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + md_1^2\right) = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2 = \frac{1}{3}15\cdot 2^2\,kg\cdot m^2 = 20kg\cdot m^2 .$$

$$I_\delta = \frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2 = \left(\frac{1}{2}40\cdot 1^2 + 40\cdot 2^2\right)kg\cdot m^2 = 180kg\cdot m^2 .$$

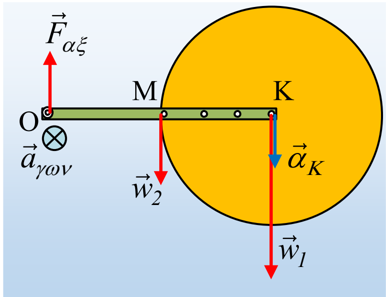
$$I_{S,O} = I_\rho + I_\delta = 20kg\cdot m^2 + 180kg\cdot m^2 = 200kg\cdot m^2 .$$

β) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό S. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα, με θετικές τις δεξιόστροφες ροπές, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_{S,O}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w_1\cdot\ell + w_2\cdot\frac{\ell}{2} = I_{S,O}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{Mg\cdot\ell + mg\cdot\frac{\ell}{2}}{I_{S,O}} \rightarrow$$

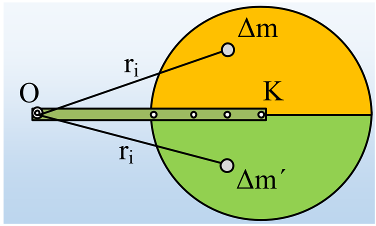
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{40\cdot 10\cdot 2 + 15\cdot 10\cdot 1}{200} rad/s^2 = \frac{19}{4} rad/s^2.$$



Έτσι το κέντρο Κ του δίσκου (και άκρο της ράβδου) έχει επιτάχυνση (επιτρόχια) κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_K = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell = \frac{19}{4}\cdot 2m/s^2 = 9,5m/s^2.$$

ii) Η ροπή αδράνειας του δίσκου, ως προς τον άξονα Ο υπολογίζεται από την εξίσωση $I_\delta = \Sigma m_i r_i^2$, όπου έχουμε χωρίσει το δίσκο σε στοιχειώδεις μάζες m_i και r_i η αντίστοιχη απόσταση από τον άξονα.



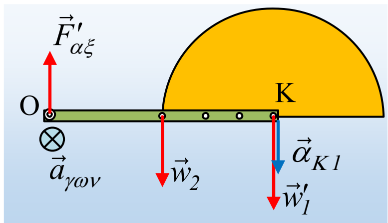
α) Αλλά τότε το άθροισμα αυτό θα μπορούσαμε να το «σπάσουμε» σε δύο αθροίσματα, το ένα για το πάνω μισό του δίσκου και το άλλο για το κάτω μισό. Όμως για κάθε στοιχειώδη μάζα Δm του πάνω μισού, υπάρχει ένα αντίστοιχο Δm συμμετρικό, στο κάτω μισό, συνεπώς όσο συνεισφέρει το πάνω μέρος, άλλο τόσο συνεισφέρει και το κάτω. Δηλαδή:

$$I_\delta = \sum m_i r_i^2 = \sum_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} m_i r_i^2 + \sum_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} m_i r_i^2 = 2\sum_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} m_i r_i^2 = 2I_{\delta 1}$$

Συνεπώς για τη ροπή αδράνειας του στερεού S_1 θα έχουμε:

$$I_1 = I_\rho + I_{\delta 1} = I_\rho + \frac{I_\delta}{2} = 20kg\cdot m^2 + \frac{180}{2}kg\cdot m^2 = 110kg\cdot m^2.$$

β) Προφανώς το βάρος του μισού δίσκου θα είναι τώρα ½ w_1 και εφαρμόζοντας ξανά το 2ο νόμο του Νεύτωνα, θα πάρουμε:



$$\Sigma\tau = I_1\cdot a_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow w'_1\cdot\ell + w_2\cdot\frac{\ell}{2} = I_1\cdot a_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\frac{M}{2}g\cdot\ell + mg\cdot\frac{\ell}{2}}{I_1} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{20\cdot 10\cdot 2 + 15\cdot 10\cdot 1}{110} rad/s^2 = 5rad/s^2.$$

Οπότε η επιτάχυνση του Κ είναι ξανά κατακόρυφη με μέτρο:

$$\alpha_K = \alpha_{\gamma\omega\nu 1}\cdot\ell = 5\cdot 2m/s^2 = 10\ m/s^2.$$

dmargaris@gmail.com