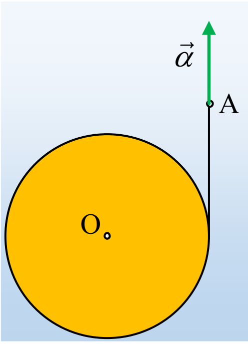
Η κίνηση ενός γιο-γιο



Γύρω από ένα μικρό κύλινδρο ακτίνας R=5cm και μάζας 0,1kg τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, το άκρο Α του οποίου επιταχύνουμε προς τα πάνω, με σταθερή επιτάχυνση, ενώ έχουμε αφήσει ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί. Με τον τρόπο αυτό, σε χρονικό διάστημα t_1=0,2s, το άκρο Α του νήματος Α μετατοπίζεται κατά y=0,4m.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση με την οποία κινείται το άκρο Α του νήματος.

ii) Να βρεθεί η δύναμη που ασκήσαμε στο άκρο Α για την παραπάνω κίνηση.

iii) Να βρεθεί η μετατόπιση του κέντρου μάζας Ο του κυλίνδρου και η γωνία στροφής του, στο παραπάνω χρονικό διάστημα t_1.

iv) Επαναλαμβάνουμε την κίνηση, αλλά τώρα ασκούμε στο άκρο του νήματος Α, μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου F_1=0,6Ν. Να βρεθεί η μετατόπιση y_1 του σημείου Α, στο ίδιο χρονικό διάστημα t_1=0,2s.

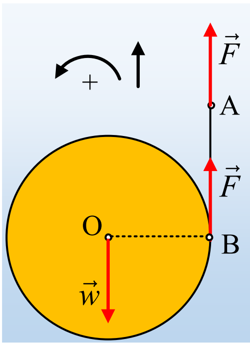
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½mR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Αφού το άκρο Α του νήματος κινείται με σταθερή επιτάχυνση, η μετατόπισή του δίνεται από την εξίσωση:

$$y=\frac{1}{2}at^2 \to a=\frac{2y}{t^2} \xrightarrow{t=t_1}$$

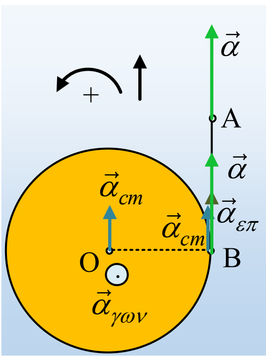
$$a=\frac{2\cdot 0,4}{0,2^2}m/s^2=20m/s^2.$$



ii) Η παραπάνω κίνηση, επιτυγχάνεται μέσω άσκησης μιας κατάλληλης κατακόρυφης δύναμης F, την οποία ασκούμε στο άκρο Α του νήματος. Η δύναμη αυτή, μέσω του νήματος μεταφέρεται στο σημείο Β του κυλίνδρου, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, όπου το νήμα «συναντά» τον κύλινδρο, όπως στο σχήμα. Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση το κυλίνδρου, ορίζουμε ως θετική την φορά προς τα πάνω και την φορά περιστροφής, την αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Νεύτωνα.

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \to F\text{-}mg=m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \to F\cdot R = ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \to 2F=m\cdot(\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R)$ (2)



Όπου στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι επιταχύνσεις, του κέντρου μάζας α_{cm} και η $\alpha_{\gamma\omega\nu}$. Αλλά τότε το σημείο Α έχει επιτάχυνση, ίση με την επιτάχυνση του άκρου Β, αφού όλα τα σημεία του νήματος θα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση:

$$\alpha_B=\alpha_A=\alpha=\alpha_{cm}+a_{\varepsilon\pi}=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2), λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (3), παίρνουμε:

$$F\text{-}mg+2F=m(\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) \to$$

$$3F - mg = ma \rightarrow F = \frac{m(g+a)}{3} = \frac{0,1 \cdot (10+20)}{3} N = 1N$$

iii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση (1), αφού F=1N και w=mg=1N, βρίσκουμε $\alpha_{cm}=0$, πράγμα που σημαίνει ότι **τελικά**, ο κύλινδρος δεν μεταφέρεται εκτελώντας μόνο στροφική κίνηση!

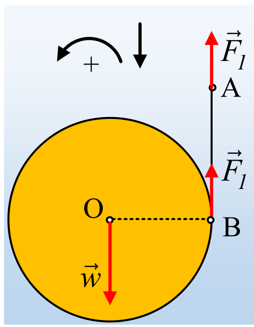
Εξάλλου από την εξίσωση (2) βρίσκουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{mR} = \frac{2 \cdot 1}{0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} rad/s^2 = 400 rad/s^2.$$

Συνεπώς ο κύλινδρος εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία κατά αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, θα ισχύει:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 = \frac{1}{2} 400 \cdot 0,2^2 rad = 8 rad$$

iv) Ασκώντας δύναμη $F_1<w$, ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα κάτω, οπότε θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική και δουλεύοντας όπως στο ii) ερώτημα, θα έχουμε:

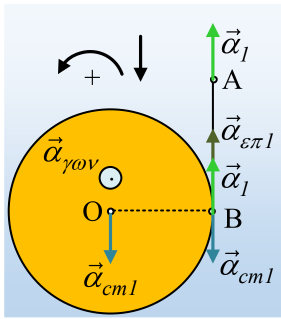


Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow mg-F_1=m\cdot\alpha_{cm1}$ (1α)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1\cdot R = ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu1} \rightarrow$

$2F_1=m\cdot(\alpha_{\gamma\omega\nu1}\cdot R)$ (2α)

Με αντικατάσταση στις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:



$$a_{cm1} = \frac{mg - F_1}{m} = \frac{0,1 \cdot 10 - 0,6}{0,1} m/s^2 = 4m/s^2.$$

$$a_{\gamma\omega\nu1}R = \frac{2F_1}{m} = \frac{2 \cdot 0,6}{0,1} m/s^2 = 12 m/s^2.$$

Με κατευθύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα.

Αλλά τότε το σημείο Β, στο σημείο που καταλήγει το κατακόρυφο νήμα, έχει επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω, μέτρου:

$$\alpha_B = \alpha_1 = \alpha_{\varepsilon\pi1} - \alpha_{cm1} = 12m/s^2 - 4m/s^2 = 8m/s^2$$

Την ίδια επιτάχυνση έχει και το άκρο Α του νήματος, οπότε σε χρόνο t_1 θα μετατοπισθεί κατά:

$$y_1 = \frac{1}{2}a_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0,2^2 m = 0,16m$$

dmargaris@gmail.com