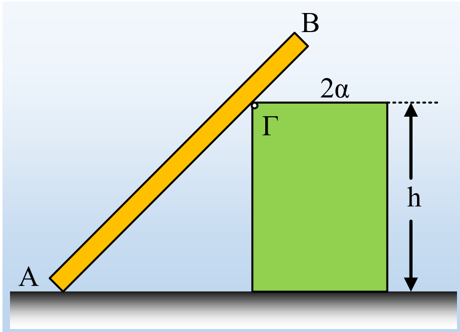
Η δοκός στηρίζεται σε ένα κιβώτιο

Η ομογενής δοκός ΑΒ έχει μήκος 4m, βάρος w_1=300Ν και ισορροπεί όπως στο σχήμα σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ στηρίζεται σε ένα κιβώτιο στο σημείο Γ, όπου (ΓΒ)=1m. Το κιβώτιο έχει ύψος h=1,8m και παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,3$. Το σύστημα ισορροπεί, χωρίς να αναπτύσσεται τριβή μεταξύ δοκού και κιβωτίου στο σημείο Γ.



i) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη δοκό από το κιβώτιο.

ii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και οριζοντίου επιπέδου για να εξασφαλίζεται η ισορροπία της δοκού.

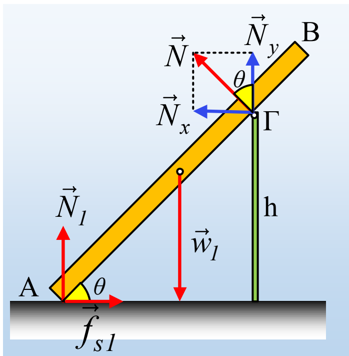
iii) Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται από το επίπεδο στο κιβώτιο.

iv) Ποιο το ελάχιστο βάρος του κιβωτίου, για να εξασφαλιστεί η ισορροπία του και να μην ολισθήσει;

v) Ποιο το ελάχιστο πλάτος 2α του κιβωτίου για να εξασφαλίζεται η μη ανατροπή του, στην περίπτωση που το βάρος του είναι το ελάχιστον δυνατόν;

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου Ν η δύναμη στήριξης από το κιβώτιο. Από την συνθήκη ισορροπίας της δοκού, έχουμε:



$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow f_{s1}=N_x=N\cdot\eta\mu\theta \quad (1) \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow N_1+N_y=w_1 \rightarrow N_1+N\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=w_1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow N\cdot(A\Gamma)-w_1\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0 \quad (3)$$

Όπου θ η γωνία της δοκού με το οριζόντιο επίπεδο, όπου:

$$\eta\mu\theta=\frac{h}{(A\Gamma)}=\frac{1,8m}{3m}=0,6 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}=0,8$$

Αλλά τότε από την εξίσωση (3) με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$N=\frac{w_1\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{2(A\Gamma)}=\frac{300\cdot4\cdot0,8}{2\cdot3}N=160N$$

ii) Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$f_{s1}=N\cdot\eta\mu\theta=160\cdot0,6N=96N \ \ \kappa\alpha\iota$$

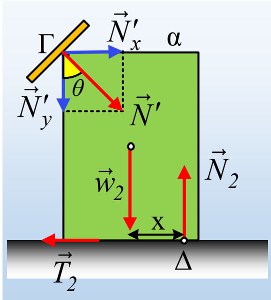
$$N_1=w_1-N\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=300N-160N\cdot0,8=172N$$

Η παραπάνω τριβή, πρέπει να είναι στατική, συνεπώς θα πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την οριακή:

$$f_{s1} \le \mu_s \cdot N_1 \rightarrow$$

$$\mu_s \ge \frac{f_{s1}}{N_1} \rightarrow \mu_s \ge \frac{96N}{172N} \rightarrow \mu_s \ge 0,56$$

iii) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο, όπως στο σχήμα όπου Ν΄ η αντίδραση της Ν. Από την ισορροπία του κιβωτίου παίρνουμε:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow f_{s2} = N'_x = N \cdot \eta\mu\theta = 160N \cdot 0,6 = 96N$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_2 = N \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + w_2$$

Αλλά και πάλι η τριβή πρέπει να είναι στατική, οπότε:

$$f_{s2} \le \mu_{s2} N_2 \rightarrow$$
$$96N \le 0,3(160 \cdot 0,8N + w_2) \rightarrow$$
$$w_2 \ge 192N$$

Άρα το ελάχιστο βάρος του κιβωτίου, για να μην ολισθήσει είναι w_2=192Ν.

iv) Στο παραπάνω σχήμα έχουμε σχεδιάσει την κάθετη αντίδραση του επιπέδου, μετατοπισμένη σε σχέση με το κέντρο μάζας του κιβωτίου. Έστω x η παραπάνω μετατόπιση και Δ το σημείο εφαρμογής της N_2 και 2α το πλάτος του κιβωτίου. Αλλά τότε το κιβώτιο ισορροπεί και ως προς οποιοδήποτε σημείο (άρα και ως προς το Δ…), το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδενικό.

$$\Sigma\tau_\Delta = 0 \rightarrow N'_y \cdot (a + x) + w_2 \cdot x - N'_x \cdot h = 0 \rightarrow$$
$$N' \cdot \sigma\upsilon\nu\theta (a + x) + w_2 \cdot x - N' \cdot \eta\mu\theta \cdot h = 0 \rightarrow$$
$$128a + 128x + 192x = 160 \cdot 0,6 \cdot 1,8 \rightarrow$$
$$x = \frac{172,8 - 128a}{320}$$

Αλλά η παραπάνω μετατόπιση x, δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από α, αφού τότε το σημείο Δ θα φτάσει στην δεξιά κορυφή του κιβωτίου, πράγμα που σημαίνει ότι αυτό είναι έτοιμο να ανατραπεί. Οπότε:

$$x \le a \rightarrow \frac{172,8 - 128a}{320} \le a \rightarrow$$
$$320a + 128a \ge 172,8 \rightarrow$$
$$a \ge 0,39m$$

Άρα το ελάχιστο πλάτος του κιβωτίου που εξασφαλίζει την μη ανατροπή είναι ίσο με:

D_{min}= 2α=0,78m.

dmargaris@gmail.com