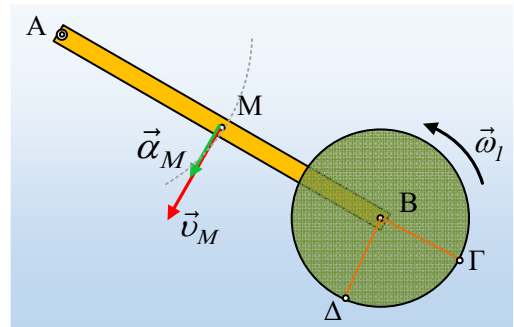


Ο δίσκος στρέφεται πάνω σε στρεφόμενη ράβδο.

Η ομογενής ράβδος AB, μήκους $l=4\text{m}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο της A. Στο άκρο της B υπάρχει άρθρωση, γύρω από την οποία στρέφεται ένας δίσκος, κέντρου B και ακτίνας $R=1\text{m}$, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=4\text{rad/s}$. Σε μια στιγμή το σύστημα, με την επίδραση κατάλληλων δυνάμεων, βρίσκεται στην θέση του σχήματος, με το μέσον της ράβδου M να έχει ταχύτητα $v_M=2\text{m/s}$ και επιτόρεια επιτάχυνση μέτρου $a_M=3\text{m/s}^2$, όπως στο σχήμα.



Για την στιγμή αυτή ζητούνται:

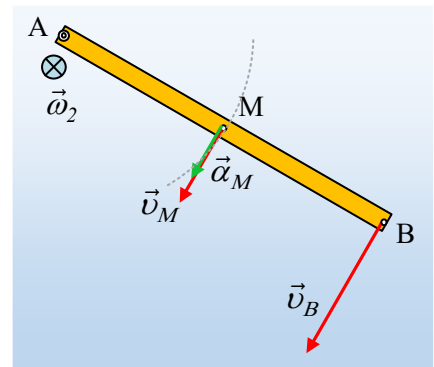
- Η γωνιακή ταχύτητα ω_2 περιστροφής της ράβδου και η ταχύτητα του άκρου της B.
- Η ταχύτητα του σημείου Γ, στο άκρο μιας ακτίνας του δίσκου, στην προέκταση της ράβδου.
- Η ταχύτητα του σημείου Δ του δίσκου, στο άκρο μιας ακτίνας BΔ, κάθετης στην ράβδο.
- Η επιτάχυνση του σημείου Δ του δίσκου.

Απάντηση:

- i) Η ράβδος AB έχει γωνιακή ταχύτητα με διεύθυνση του άξονα, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα. Όσον αφορά το μέτρο της, λαμβάνοντας υπόψη της κυκλική κίνηση του μέσου M της ράβδου, θα έχουμε:

$$v_M = \omega_2 \cdot (AM) \rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{v_M}{\ell/2} = \frac{2}{2} \text{rad/s} = 1 \text{rad/s}$$



Ενώ το άκρο B της ράβδου (και κέντρο του δίσκου...) εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας ℓ , έχοντας γραμμική ταχύτητα, όπως στο σχήμα (κάθετη στη ράβδο), μέτρου:

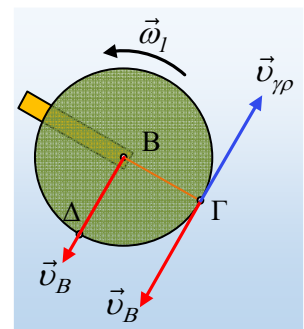
$$v_B = \omega_2 \cdot \ell = 1 \cdot 4 \text{m/s} = 4 \text{m/s}$$

- ii) Ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση μια μεταφορική με ταχύτητα κέντρου μάζας \vec{v}_B και μια περιστροφική γύρω από το B, με γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Αλλά τότε το σημείο Γ έχει ταχύτητα \vec{v}_B λόγω της μεταφορικής κίνησης και μια γραμμική ταχύτητα, μέτρου:

$$v_{\gamma\beta} = \omega_1 \cdot R = 4 \cdot 1 \text{m/s} = 4 \text{m/s}$$

όπως στο σχήμα, λόγω της κυκλικής του κίνησης, γύρω από το κέντρο B.

Αλλά τότε η συνολική ταχύτητα του σημείου Γ είναι μηδενική, αφού:



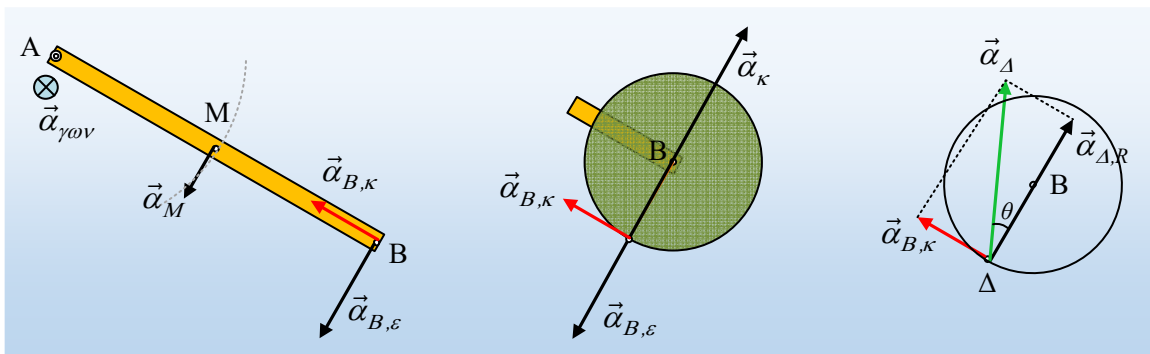
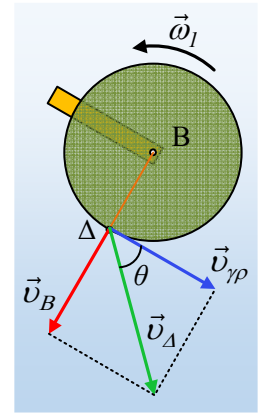
$$v_{\Gamma} = v_B - v_{\gamma\rho} = 4m/s - 4m/s = 0$$

iii) Εφαρμόζοντας την ίδια λογική για το σημείο Δ του δίσκου, σχεδιάζουμε τις ταχύτητες, όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε η ταχύτητά του θα έχει μέτρο:

$$v_{\Delta} = \sqrt{v_B^2 + v_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} m/s = 4\sqrt{2} m/s$$

Η διεύθυνσή της δε, σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία $\theta=45^\circ$, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο.

iv) Αφού το μέσον Μ της ράβδου έχει επιτρόχια επιτάχυνση (στη διεύθυνση της ταχύτητάς του), η ράβδος έχει γωνιακή επιτάχυνση, πάνω στον άξονα περιστροφής της, όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα.



Το μέσον Μ της ράβδου έχει βέβαια και κεντρομόλο επιτάχυνση, όπως και κάθε σημείο της ράβδου, η οποία δεν μας αφορά εδώ.

$$\alpha_M = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot (AM) \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_M}{\ell/2} = \frac{3}{2} rad/s^2.$$

Οπότε το άκρο Β της ράβδου έχει επιτρόχια επιτάχυνση, κάθετη στη ράβδου, μέτρου:

$$\alpha_{B,\epsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell = \frac{3}{2} \cdot 4m/s^2 = 6m/s^2.$$

Το άκρο Β, έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το Α, μέτρου:

$$\alpha_{B,\kappa} = \omega_1^2 \cdot \ell = 1 \cdot 4 m/s^2 = 4m/s^2.$$

Αλλά τότε το σημείο Δ του δίσκου, έχει λόγω μεταφορικής κίνησης του δίσκου την επιτάχυνση του κέντρου μάζας Β, ενώ λόγω της περιστροφής του δίσκου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1 έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, όπως στο 2^ο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{\kappa} = \omega_1^2 R = 4^2 \cdot 1m/s^2 = 16m/s^2.$$

Έτσι προκύπτει ότι στην διεύθυνση της ακτίνας ΔΒ έχει επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το Β και μέτρο:

$$\alpha_{\Delta,R} = \alpha_{\kappa} - \alpha_B = 16m/s^2 - 6m/s^2 = 10m/s^2.$$

Οπότε με βάση το 3^ο από τα παραπάνω σχήματα, το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Δ είναι:

$$\alpha_{\Delta} = \sqrt{\alpha_{B\kappa}^2 + \alpha_{\Delta R}^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} \text{ m / s}^2 = \sqrt{116} \text{ m / s}^2.$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία θ με την ακτίνα ΔB , όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\alpha_{B\kappa}}{\alpha_{\Delta R}} = \frac{4}{10} = 0,4$$

dmargaris@gmail.com