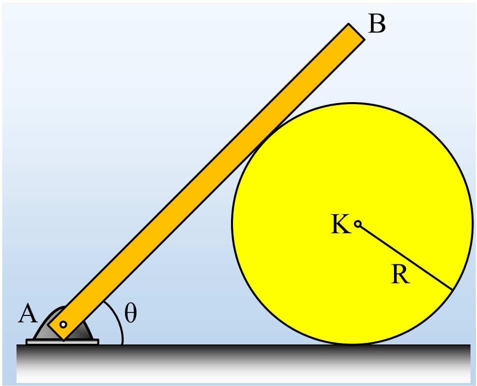
Από την ράβδο, στον κύλινδρο

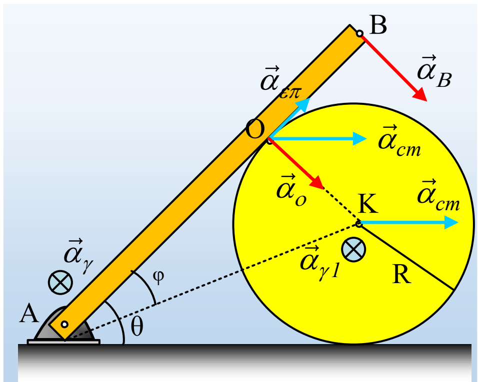
Η ράβδος ΑΒ είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, ενώ στηρίζεται σε κύλινδρο ακτίνας R, σχηματίζοντας γωνία θ=60° με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ συγκρατούμε τον κύλινδρο, για να μην κινηθεί. Αν το μήκος της ράβδου είναι l=2R και αφήνοντας το σύστημα ελεύθερο, το άκρο Β της ράβδου αποκτήσει αρχική επιτάχυνση μέτρου $\alpha_B=2m/s^2$, να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ του κυλίνδρου.



Απάντηση:

Η εκφώνηση δεν μας αναφέρει αν υπάρχουν ή όχι τριβές, οπότε δεν ξέρουμε αν ο κύλινδρος εκτελέσει μεταφορική ή σύνθετη κίνηση. Η γενικότητα επιβάλλει να δεχτούμε ότι ο κύλινδρος εκτός από την επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ, αποκτά και κάποια γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma 1}$, έστω όπως στο σχήμα.

Αντίθετα η ράβδος αποκτά γωνιακή επιτάχυνση α_γ κατά την περιστροφή της, γύρω από την άρθρωση, στο άκρο Α, οπότε το άκρο της Β, αποκτά την επιτρόχια επιτάχυνση, όπως στο σχήμα. Τότε:



$$\alpha_B = \alpha_\gamma \cdot \ell = \alpha_\gamma \cdot 2R \quad (1)$$

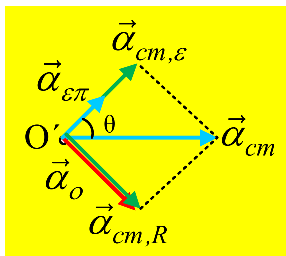
Αν Ο το σημείο επαφής της ράβδου με τον κύλινδρο, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ, παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{R}{(AO)} \rightarrow (AO) = \frac{R}{\varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{R}{\sqrt{3}/3} = R\sqrt{3}$$

Οπότε το σημείο Ο της ράβδου έχει επιτάχυνση, κάθετη στη ράβδο, όπως στο σχήμα μέτρου:

$$\alpha_o = \alpha_\gamma \cdot (AO) = \alpha_\gamma \cdot R\sqrt{3} \qquad (2)$$

Ερχόμαστε τώρα στο σημείο Ο΄ του κυλίνδρου που έρχεται σε επαφή με τη ράβδο (το σημείο σε επαφή με το Ο). Αυτό έχει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας α_κ του κυλίνδρου και μια επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\pi}$, όπως στο παραπάνω σχήμα. Αναλύουμε την α_κ σε δύο συνιστώσες, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε για την συνιστώσα στην διεύθυνση της ακτίνας $\vec{\alpha}_{cm,R}$ θα έχουμε:



$$\alpha_{cm,R} = a_{cm} \cdot \eta\mu\theta \quad (3)$$

Τα σημεία Ο (της ράβδου) και Ο΄ του κυλίνδρου που βρίσκονται σε επαφή, θα έχουν την ίδια επιτάχυνση στην διεύθυνση της ακτίνας, δηλαδή από τις εξισώσεις (2) και (3) θα πάρουμε:

$$a_{cm} \cdot \eta\mu\theta = a_\gamma \cdot R\sqrt{3} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{a_\gamma \cdot R\sqrt{3}}{\eta\mu\theta} = \frac{a_\gamma \cdot R\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = a_\gamma \cdot 2R \xrightarrow{(1)}$$

$$a_{cm} = \alpha_B = 2m/s^2.$$

Σχόλιο:

Προφανώς τα σημεία Ο και Ο΄ δεν έχουν την ίδια επιτάχυνση στην διεύθυνση της εφαπτόμενης του κυλίνδρου, αφού η ράβδος δεν έχει επιτάχυνση στη διεύθυνση αυτή, ενώ το σημείο Ο΄ έχει εφαπτομενική επιτάχυνση:

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma,1} \cdot R + a_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Πράγμα που σημαίνει ότι θα υπάρξει ολίσθηση μεταξύ των δύο επιφανειών.

dmargaris@gmail.com