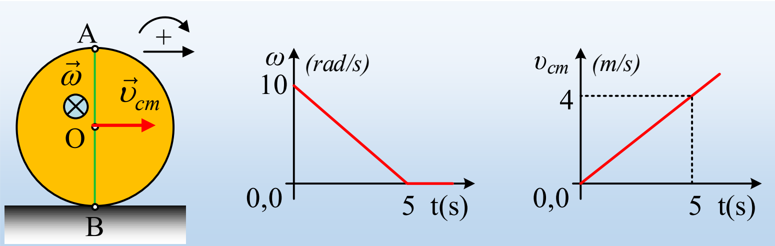
Ένας δίσκος που δεν κυλίεται.

Ένας δίσκος κέντρου Ο και ακτίνας R=0,5m κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και στο σχήμα βλέπετε πώς μεταβάλλονται η γωνιακή του ταχύτητα και η ταχύτητα του κέντρου του Ο.



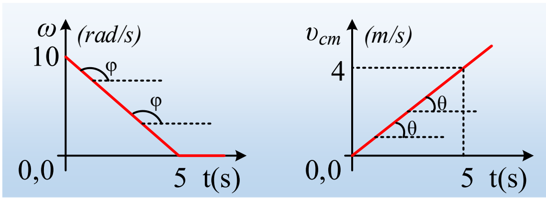
i) Να υπολογισθούν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1=4s.

ii) Να βρεθούν η ταχύτητα και η οριζόντια επιτάχυνση του ανώτερου σημείου Α του δίσκου, τη χρονική στιγμή $t=0^+$.

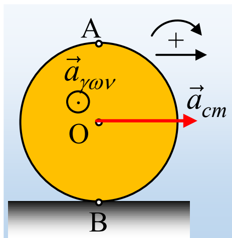
iii) Να βρεθούν τη στιγμή t_1 η ταχύτητα και η κατακόρυφη επιτάχυνση του σημείου επαφής, του δίσκου με το επίπεδο.

iv) Πόσες στροφές έχει πραγματοποιήσει ο δίσκος μέχρι τη στιγμή t_1 και πόσο έχει μετατοπισθεί προς τα δεξιά;

Απάντηση:



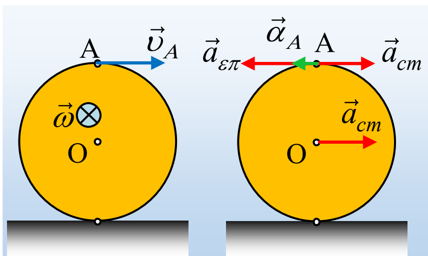
i) Στο χρονικό διάστημα 0-5s οι κλίσεις και στα δύο διαγράμματα παραμένουν σταθερές, πράγμα που σημαίνει ότι με βάση το διάγραμμα ω-t, η γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή, ενώ με βάση το διάγραμμα υ-t, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, παραμένει επίσης σταθερή. Έτσι οι στιγμιαίες τιμές την στιγμή t_1=4s, συμπίπτουν με τις αντίστοιχες μέσες τιμές, στο χρονικό διάστημα 0-5s:



$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-10}{5-0} rad/s^2 = -2 rad/s^2 .$$

$$\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t} = \frac{4-0}{5-0} rad/s^2 = 0,8\ m/s^2 .$$

Με κατευθύνσεις όπως στο διπλανό σχήμα, όπου η γωνιακή επιτάχυνση έχει φορά προς τα έξω, αφού προέκυψε αρνητική (στο σχήμα δίνεται η δεξιόστροφη φορά ως θετική).



ii) Θεωρώντας την κίνηση του δίσκου σύνθετη, μια μεταφορική με επιτάχυνση α_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Ο, τότε το σημείο Α τη στιγμή $t=0^+$ έχει μόνο γραμμική ταχύτητα, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα και μέτρο:

$$\upsilon_A = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 10 \cdot 0,5m/s = 5m/s$$

Με την ίδια λογική έχει επιτάχυνση α_{cm}, λόγω μεταφορικής κίνησης και επιτρόχια επιτάχυνση, με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| R = 2 \cdot 0,5m/s^2 = 1m/s^2 .$$

Αλλά τότε η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου Α, έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και μέτρο:

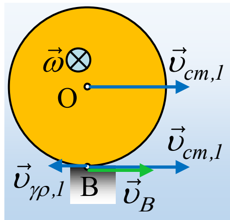
$$\alpha_A = \alpha_{\varepsilon\pi} - \alpha_{cm} = 1m/s^2 - 0,8m/s^2 = 0,2m/s^2 .$$

Σημείωση: Το σημείο Α έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία είναι κατακόρυφη, προς το κέντρο Ο.

iii) Τη χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος έχει ταχύτητα κ.μ. και γωνιακή ταχύτητα:

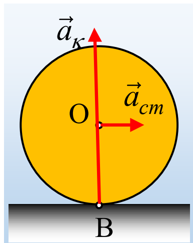
$$\upsilon_{cm,1} = a_{cm} t_1 = 0,8 \cdot 4m/s = 3,2m/s \text{ και}$$

$$\omega_1 = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 10rad/s + (-2) \cdot 4rad/s = 2rad/s.$$



Οπότε το σημείο επαφής με το έδαφος, έχει τις ταχύτητες του σχήματος και συνολικά ταχύτητα προς τα δεξιά, μέτρου:

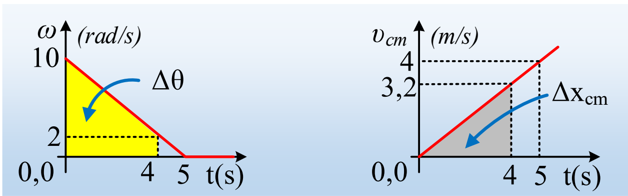
$$\upsilon_B = \upsilon_{cm,1} - \upsilon_{\gamma\rho,1} = \upsilon_{cm,1} - \omega_1 R = 3,2m/s - 2 \cdot 0,5m/s = 2,2m/s.$$



Ενώ η κατακόρυφη επιτάχυνση του Β, ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση, έχει μέτρο:

$$\alpha_K = \omega_1^2 R = 2^2 \cdot 0,5m/s^2 = 2m/s^2 .$$

iv) Το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζίου στο διάγραμμα ω-t, είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία στροφής του δίσκου, ενώ το αντίστοιχο εμβαδόν του γκρι τριγώνου, στο διάγραμμα υ_{cm}-t, είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση του κέντρου μάζας. Με βάση λοιπόν τα παρακάτω διαγράμματα θα έχουμε:



$$\Delta\theta = \frac{B+\beta}{2}\upsilon = \frac{10+2}{2}4rad = 24rad \rightarrow$$
$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{24}{2\pi}\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma \approx 3,8\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

και

$$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}4 \cdot 3,2m = 6,4m$$

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει τις εξισώσεις ταχύτητας-χρόνου και την αντίστοιχη γωνιακής ταχύτητας-χρόνου για τον παραπάνω υπολογισμό…

dmargaris@gmail.com