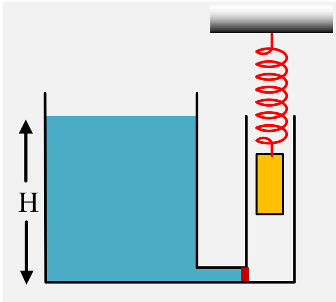
Όταν ανοίξουμε την τάπα.



Ένα κυλινδρικό σώμα Σ εμβαδού βάσης A=20cm^2 και ύψους l=20cm, κρέμεται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=30N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο. Όταν το Σ τίθεται σε κατακόρυφη ταλάντωση εκτελεί 5 ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα t_1=3,14s.

i) Ποια η πυκνότητα του σώματος Σ;

Το σώμα Σ τοποθετείται στο εσωτερικό του δεξιού δοχείου, όπως στο σχήμα, εμβαδού διατομής A_1=30cm^2, το οποίο συνδέεται με σωλήνα, ο οποίος κλείνεται με τάπα, με το αριστερό δοχείο, εμβαδού βάσης A_2=90cm^2, το οποίο περιέχει νερό μέχρι ύψος H=50cm. Ανοίγουμε την τάπα και τελικά αποκαθίσταται ισορροπία με το νερό σε ύψος h=40cm και στα δυο δοχεία.

ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της πίεσης, σε ένα σημείο κοντά στον πυθμένα του αριστερού δοχείου, εξαιτίας της πτώσης της στάθμης του νερού.

iii) Να βρεθεί το ύψος l_1 του σώματος Σ που βυθίζεται στο νερό.

iv) Πόσο ανεβαίνει το σώμα Σ, εξαιτίας της μεταφοράς του νερού στο δεξιό δοχείο;

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1g/cm^3, g=10m/s^2, ενώ ο σωλήνας που συνδέει τα δύο σκέλη του δοχείου, έχει αμελητέο όγκο.

Απάντηση:

i) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Σ, στο άκρο ελατηρίου είναι ίση:

$$T=\frac{t_1}{N}=\frac{3,14s}{5}=0,2\pi \quad (s)$$

Ενώ δίνεται και από την εξίσωση (D=k):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \to m=\frac{T^2k}{4\pi^2}=\frac{0,04\pi^2\cdot 30}{4\pi^2}kg=0,3kg$$

Οπότε το υλικό από το οποίο αποτελείται το σώμα Σ, έχει πυκνότητα:

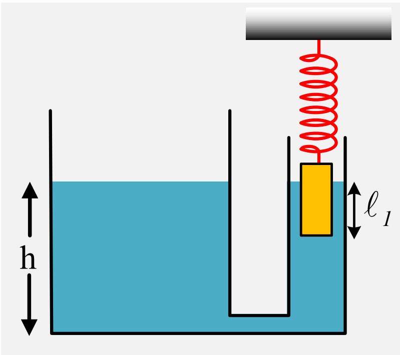
$$m=\rho V \to \rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{A\ell}=\frac{300g}{20cm^2\cdot 20cm}=0,75g/cm^3.$$

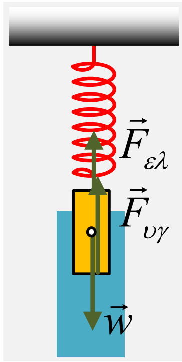
ii) Η πίεση σε ένα σημείο κοντά στον πυθμένα του αριστερού δοχείου είναι ίση με $p=p_{ατμ}+\rho gy$, οπότε η μεταβολή της πίεσης, θα είναι ίση:

$$\Delta p=\left(p_{ατμ}+\rho gh\right)-\left(p_{ατμ}+\rho gH\right)=\rho g\left(h-H\right)\to$$
$$\Delta p=1.000\cdot 10\cdot(0,4-0,5)N/m^2=-1.000N/m^2.$$

iii) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, βλέπουμε την κατάσταση, μετά την αποκατάσταση ισορροπίας, όπου στο νερό βυθίζεται τμήμα του κυλίνδρου ύψους ℓ_1. Ο όγκος του νερού παρέμεινε σταθερός, οπότε:

$$V_{\alpha\rho\chi} = V_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$
$$A_2 H = A_2 h + A_1 h - A\ell_1 \rightarrow$$
$$\ell_1 = \frac{(A_2 + A_1)h - A_2 H}{A} = \frac{(90cm^2 + 30cm^2)\cdot 40cm - 90cm^2 \cdot 50cm}{20cm^2} = 15cm$$





iv) Στο δεξιό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, όπου $F_{\upsilon\gamma}$ η δύναμη από το υγρό στην βάση του κυλίνδρου και $F_{\varepsilon\lambda}$ η δύναμη από το ελατήριο. Η δράση της ατμόσφαιρας δεν λαμβάνεται υπόψη, αφού οι δύο βάσεις του κυλίνδρου δέχονται αντίθετες δυνάμεις, λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης. Η δύναμη από το νερό έχει μέτρο:

$$F_{\upsilon\gamma} = p \cdot A = \rho g \ell_1 \cdot A = 1.000 \cdot 10 \cdot 0,15 \cdot 20 \cdot 10^{-4} N = 3N$$

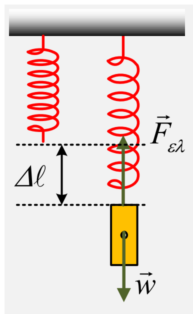
Οπότε από την ισορροπία του κυλίνδρου παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + F_{\upsilon\gamma} - w = 0 \rightarrow$$
$$F_{\varepsilon\lambda} = w - F_{\upsilon\gamma} = 3N - 3N = 0$$

Δηλαδή το ελατήριο έχει αποκτήσει το φυσικό μήκος του.

Όμως αρχικά (πριν την είσοδο του νερού) το σώμα ισορροπούσε, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά $\Delta\ell$, όπου:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \rightarrow k\Delta\ell = mg \rightarrow$$
$$\Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{0,3 \cdot 10}{30} m = 0,1m$$



Αλλά αφού τελικά το ελατήριο απέκτησε το φυσικό μήκος του, σημαίνει ότι το σώμα ανέβηκε κατά:

$$d = \Delta\ell = 10cm$$

dmargaris@gmail.com