

### Κάτι σαν τη Γη με τη Σελήνη

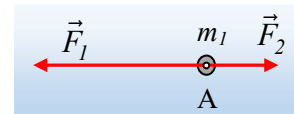
Δίνεται ένα σύστημα δύο σφαιρικών ουρανίων σωμάτων X και Y, τα οποία θεωρούμε ακίνητα, μακριά από άλλα ουράνια σώματα. Δίνονται ότι το σώμα X έχει ακτίνα  $R=6.400\text{km}$ , η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά του είναι ίση με  $g=10\text{m/s}^2$ , έχει δε μάζα  $M=80m$ , όπου  $m$  η μάζα του μικρότερου σώματος Y, ενώ η απόσταση των κέντρων των δύο σφαιρών είναι  $d=60R$ . (το σχήμα είναι ενδεικτικό χωρίς να κρατάμε τα αναλογίες των αποστάσεων). Αφήνουμε στο σημείο A, πάνω στη διάκεντρο, σε απόσταση  $r_1=50R$  από το κέντρο του σώματος X, ένα σώμα Σ μάζας  $m_1=1\text{kg}$ .



- i) Να υπολογίσετε τον λόγο  $F_1/F_2$  των δυνάμεων που το σώμα Σ δέχεται από τα ουράνια σώματα X και Y αντίστοιχα.
- ii) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του σώματος Σ στο σημείο A, αν το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν στο άπειρο.
- iii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Σ, μετά από μετατόπιση  $s=10R$ .

#### Απάντηση:

- i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ελκτικές δυνάμεις που το σώμα Σ δέχεται από τα ουράνια σώματα X και Y. Για τα μέτρα τους έχουμε:



$$F_1 = G \frac{Mm_1}{r_1^2} = G \frac{Mm_1}{(50R)^2} = G \frac{Mm_1}{2.500R^2} \text{ και}$$

$$F_2 = G \frac{mm_1}{r_2^2} = G \frac{mm_1}{(d-r_1)^2} = G \frac{mm_1}{100R^2}$$

Με διαίρεση κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G \frac{Mm_1}{2.500R^2}}{G \frac{mm_1}{100R^2}} = \frac{M}{25m} = \frac{80m}{25m} = \frac{16}{5}$$

- ii) Η δυναμική ενέργεια του σώματος Σ θα οφείλεται στο συνολικό βαρυτικό πεδίο και των δύο ουρανίων σωμάτων και θα έχει τιμή:

$$U_A = m_1 V_A = m_1 (V_{A,X} + V_{A,Y}) = m_1 \left( -G \frac{M}{r_1} - G \frac{m}{r_2} \right) = m_1 \left( -G \frac{M}{50R} - G \frac{m}{80 \cdot 10R} \right) \rightarrow$$

$$U_A = -\frac{17}{800} G \frac{Mm_1}{R} \quad (1)$$

Αλλά για την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του X (ίσης με την ένταση του πεδίου βαρύτητας του σώματος X, αφού η επίδραση της ύπαρξης του Y θεωρείται αμελητέα), έχουμε:

$$g = G \frac{M}{R^2} \rightarrow GM = gR^2 \quad (2)$$

Και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$U_A = -\frac{17}{800} G \frac{Mm_1}{R} = -\frac{17}{800} \frac{gR^2 m_1}{R} = -\frac{17}{800} m_1 g R \quad (3)$$

$$U_A = -\frac{17}{800} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ J} = -13,6 \cdot 10^5 \text{ J}$$

iii) Με βάση το i) ερώτημα, αφού  $F_1 > F_2$  το σώμα Σ θα κινηθεί προς το μεγαλύτερο ουράνιο σώμα Χ, οπότε αφού μετατοπισθεί κατά  $s$ , θα φτάσει στο σημείο Β, με ταχύτητα  $v$ , απέχοντας αποστάσεις  $r_1 = 40R$  και  $r_2 = 20R$  από τα Χ και Υ. Αλλά τότε στην θέση αυτή θα έχει δυναμική ενέργεια:



$$U_B = m_1 V_B = m_1 (V_{B,X} + V_{B,Y}) = m_1 \left( -G \frac{M}{r_1} - G \frac{m}{r_2} \right) = m_1 \left( -G \frac{M}{40R} - G \frac{M}{80 \cdot 20R} \right) \rightarrow$$

$$U_B = -\frac{41}{1600} G \frac{Mm_1}{R} \approx -\frac{1}{40} G \frac{Mm_1}{R} \xrightarrow{(2)}$$

$$U_B = -\frac{1}{40} \frac{gR^2 m_1}{R} = -\frac{1}{40} m_1 g R \quad (4)$$

Οπότε εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, για την κίνηση του Σ, μεταξύ των θέσεων Α και Β, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \xrightarrow{(3),(4)}$$

$$0 - \frac{17}{800} m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{40} m_1 g R \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{3}{800} m_1 g R \rightarrow v = \sqrt{\frac{3gR}{400}} \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \cdot 64 \cdot 10^5}{400}} \text{ m/s} = 400\sqrt{3} \text{ m/s}$$

### Σχόλια:

- 1) Στην πραγματικότητα τα δυο ουράνια σώματα στρέφονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους, θεωρώντας ότι βρίσκονται μακριά από άλλα ουράνια σώματα.
- 2) Τα παραπάνω ουράνια σώματα, θα μπορούσαν να είναι η Γη και η Σελήνη. Αποφύγαμε την ταύτιση, αφού τροποποιήσαμε ελαφρά τα δεδομένα, για να έχουμε πιο εύκολες αριθμητικές πράξεις.
- 3) Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στο σημείο Α, σε απόσταση  $50R$  από το κέντρο της «Γης» το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι πιο ισχυρό από το αντίστοιχο της «Σελήνης». Ακόμη πιο φανερό γίνεται αυτό αν προσέξουμε την προσέγγιση που κάναμε όταν υπολογίσαμε τη δυναμική ενέργεια στο σημείο Β. Στην πραγματικότητα αγνοήσαμε την βαρυτική δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην ύπαρξη της Σελήνης.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)