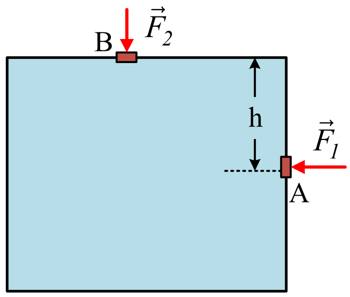
Ένα κλειστό δοχείο με δύο τάπες.



Στο σχήμα βλέπετε ένα δοχείο κυβικού σχήματος πλευράς α=2m, το οποίο είναι γεμάτο πλήρως με νερό και στο οποίο υπάρχουν δύο μικρές τρύπες διατομής $A=2cm^2$, οι οποίες κλείνονται με τάπες αμελητέου βάρους, και για την ισορροπία των οποίων απαιτείται να τους ασκούμε τις δυνάμεις F_1 και F_2. Αν δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ τάπας και τοιχωμάτων του δοχείου, ενώ η Α τάπα βρίσκεται στο μέσον της δεξιάς πλευράς (h=1m) και για την ισορροπία της απαιτείται άσκηση οριζόντιας δύναμης F_1=4N, να υπολογιστούν:

i) Η δύναμη που ασκείται στην τάπα Α από την ατμόσφαιρα.

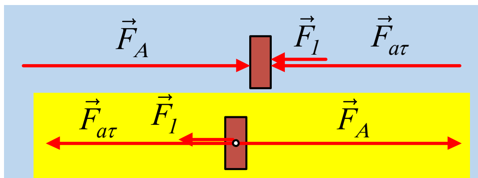
ii) Η πίεση στην αριστερή πλευρά της τάπας Α.

iii) Το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης F_2 για την ισορροπία της τάπας Β.

iv) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που το νερό ασκεί στην πάνω και στην κάτω βάση του δοχείου.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m³, g=10m/s² και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=1\cdot 10^5$Pa.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην οριζόντια διεύθυνση στην τάπα Α, όπου $\vec{F}_{ατ}$ η δύναμη από την ατμόσφαιρα και $\vec{F}_A$ η δύναμη από το νερό. (Συνήθως στις ανάλογες ασκήσεις με πιεστικές δυνάμεις, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις όπως στο πάνω σχήμα, ενώ αν θέλουμε να δείξουμε και τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων ο σωστός τρόπος απεικόνισης είναι ο κάτω…). Για το μέτρο της δύναμης λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης, έχουμε:

$$p_{ατ} = \frac{F_{ατ}}{A} \rightarrow F_{ατ} = p_{ατ} \cdot A = 1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\, N = 20N$$

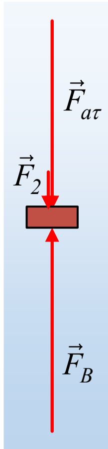
ii) Από την ισορροπία της τάπας παίρνουμε $\Sigma F_x=0$ οπότε για την δύναμη που το νερό ασκεί στην τάπα, έχουμε:

$$F_A=F_{ατ}+F_1=20N+4N=24N$$

Οπότε θεωρώντας την πίεση σταθερή σε όλη την έκταση της επιφάνειας της τάπας (πράγμα …λογικό, αν δούμε το εμβαδόν της σε σχέση με το εμβαδόν της πλευράς του δοχείου $α^2=4m^2$), παίρνουμε:

$$p_A = \frac{F_A}{A} = \frac{24N}{2\cdot 10^{-4} m^2} = 1,2\cdot 10^5 N/m^2 = 1,2\cdot 10^5 Pa$$

iii) Από τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής, για ένα σημείο στην κάτω επιφάνεια της τάπας Β και ένα σημείο στην αριστερή πλευρά της Α τάπας, παίρνουμε:

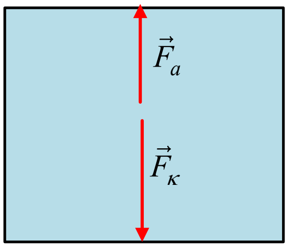


$$p_A - p_B = \rho g h \rightarrow$$
$$p_B = p_A - \rho g h = 1{,}2 \cdot 10^5\, Pa - 1.000 \cdot 10 \cdot 1 Pa = 1{,}1 \cdot 10^5\, Pa$$

Οπότε από την ισορροπία της B τάπας, παίρνουμε για την κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_2 + F_{ατ} - F_B = 0 \rightarrow$$
$$F_2 = F_B - F_{ατ} = p_B \cdot A - p_{ατ} \cdot A = 1{,}1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} N - 20N = 2N$$

iv) Η τιμή της πίεσης στα σημεία της πάνω βάσης είναι ίση με την πίεση p_B, που υπολογίσαμε παραπάνω. Συνεπώς το νερό ασκεί στην πάνω έδρα κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω μέτρου:



$$F_a = p_B \cdot a^2 = 1{,}1 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 2^2 m^2 = 440.000N$$

Εξάλλου στα σημεία της κάτω βάσης επικρατεί πίεση:

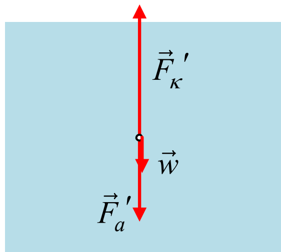
$$p_κ - p_B = \rho g \cdot α \rightarrow$$
$$p_κ = p_B + \rho g α = 1{,}1 \cdot 10^5\, Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot 2 Pa = 1{,}3 \cdot 10^5\, Pa$$

Με αποτέλεσμα στη βάση να ασκείται κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα κάτω, μέτρου:

$$F_κ = p_κ \cdot a^2 = 1{,}3 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 2^2 m^2 = 520.000N$$

Σχόλιο:

Και αν αφαιρέσουμε τις δύο παραπάνω δυνάμεις τι θα βρούμε;



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο νερό, στην κατακόρυφη διεύθυνση, το βάρος και οι αντιδράσεις των $F_α$ και $F_κ$, από τις δύο βάσεις. Αφού η ποσότητα αυτή του νερού ισορροπεί πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } w = F'_κ - F'_α = 520.000N - 440.000N = 80.000N$$

Πράγματι αν υπολογίσουμε το βάρος του νερού έχουμε:

$$w = mg = \rho V g = \rho α^3 g = 1.000 \cdot 2^3 \cdot 10N = 80.000N$$

dmargaris@gmail.com