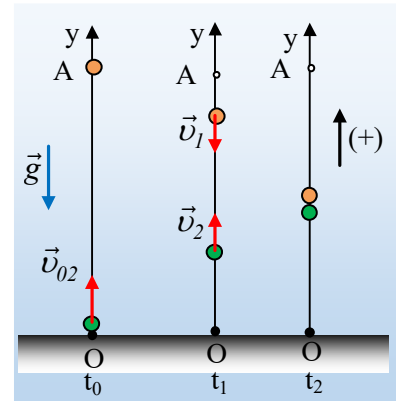


Δύο σώματα κινούνται κατακόρυφα.

Από ένα σημείο A σε ύψος $h=60\text{m}$ από το έδαφος, αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$, να πέσει ένα σώμα Σ_1 , χωρίς αρχική ταχύτητα, ενώ ταυτόχρονα από το σημείο O του εδάφους, το οποίο βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το A, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, ένα δεύτερο σώμα Σ_2 , με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_{02}=20\text{m/s}$.

Αφού θεωρήσετε το σημείο O ως αρχή ενός άξονα $y'y$ με θετική κατεύθυνση προς τα πάνω:



- i) Να γράψετε τις εξισώσεις ταχύτητας- χρόνου ($v=v(t)$) και θέσης- χρόνου ($y=y(t)$) για τα δυο σώματα.
- ii) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες και τις θέσεις των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.
- iii) Ποια χρονική στιγμή t_2 τα δυο σώματα συγκρούονται; Να βρείτε την θέση σύγκρουσης, καθώς και τις ταχύτητες των σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Αφού ως αρχή του άξονα λαμβάνουμε το σημείο O του εδάφους, με θετική φορά προς τα πάνω, τα δυο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους από τις θέσεις $x_{01}=h=60\text{m}$ και $x_{02}=0$ με αρχικές αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων $v_{01}=0$ και $v_{02}=20\text{m/s}$.

- i) Για το σώμα Σ_1 , το οποίο κινείται προς τα κάτω, με επιτάχυνση $a_1=-g$ (η επιτάχυνση έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση) έχουμε τις εξισώσεις:

$$v_1 = at = -gt \quad (1\alpha) \quad \text{και} \quad \Delta y = y - h = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2\alpha)$$

Για το σώμα Σ_2 αντίστοιχα θα έχουμε:

$$v_2 = v_{02} + at = v_{02} - gt \quad (1\beta) \quad \text{και} \quad \Delta y = y = v_{02}t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow y = v_{02}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2\beta)$$

- ii) Με αντικατάσταση στις παραπάνω εξισώσεις $t=t_1=1\text{s}$ παίρνουμε για το σώμα Σ_1 :

$$v_1 = -gt = -gt_1 = -10 \cdot 1\text{m/s} = -10\text{m/s} \quad \text{και}$$

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 = 60\text{m} - \frac{1}{2}10 \cdot 1^2\text{m} = 55\text{m}$$

Οι παραπάνω τιμές μας λένε ότι το σώμα κινείται προς τα κάτω, με ταχύτητα μέτρου 10m/s , ενώ απέχει 55m από το έδαφος.

Αντίστοιχα για το B σώμα:

$$v_2 = v_{02} - gt_1 = 20\text{m/s} - 10 \cdot 1\text{m/s} = 10\text{m/s} \quad \text{και}$$

$$y_2 = v_{01}t - \frac{1}{2}gt_1^2 = 20 \cdot 1m - \frac{1}{2}10 \cdot 1^2 m = 15m$$

iii) Έστω ότι τα δυο σώματα συγκρούονται τη χρονική στιγμή t_2 σε μια θέση y . Τότε από τις εξισώσεις (2α) και (2β) τα πρώτα μέλη είναι ίσα, οπότε και τα δεύτερα θα είναι ίσα:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = v_{01}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow$$

$$h = v_{01}t_2 \rightarrow t_2 = \frac{h}{v_{01}} = \frac{60m}{20m/s} = 3s$$

Αντικαθιστώντας στην (2^α) παίρνουμε για την θέση σύγκρουσης (ή με αντικατάσταση στην (2β)...):

$$y = h - \frac{1}{2}gt_2^2 = 60m - \frac{1}{2}10 \cdot 3^2 m = 15m$$

Όσον αφορά τις ταχύτητες, ελάχιστα πριν την κρούση, με αντικατάσταση στις (1^α) και (2^α) παίρνουμε:

$$v_{1,\pi} = -gt_2 = -10 \cdot 3m/s = -30m/s \text{ και}$$

$$v_{2,\pi} = v_{02} - gt_2 = 20m/s - 10 \cdot 3m/s = -10m/s$$

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ελάχιστα πριν την σύγκρουση και τα δυο σώματα έχουν αρνητικές ταχύτητες, δηλαδή κινούνται προς τα κάτω. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα Σ_2 έχει προηγουμένα φτάσει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του και πλέον πέφτει προς το έδαφος.

Στο ερώτημα, πότε σταμάτησε να ανεβαίνει, μπορούμε να απαντήσουμε αν αντικαταστήσουμε όπου $v_1=0$, παίρνοντας:

$$v_{2,\mu} = v_{02} - gt_3 = 0 \rightarrow t_3 = \frac{v_{02}}{g} = \frac{20}{10} s = 2s$$

Ενώ για το μέγιστο ύψος στο οποίο ανέβηκε:

$$y_{max} = v_{01}t_2 - \frac{1}{2}gt_3^2 = 20 \cdot 2m - \frac{1}{2}10 \cdot 2^2 m = 20m$$

dmargaris@gmail.com