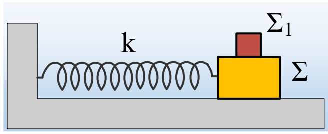
Αφαιρώντας το ένα σώμα, τι συμβαίνει;



Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ και $Σ_1$, με μάζες M και m αντίστοιχα, εκτελούν ΑΑΤ στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με πλάτος Α.

Σε μια στιγμή αφαιρούμε το πάνω σώμα $Σ_1$, χωρίς να επιφέρουμε κάποια αλλαγή στο σώμα Σ, το οποίο συνεχίζει με μια νέα ταλάντωση. Η αφαίρεση και απομάκρυνση του $Σ_1$, μπορεί να γίνει:

i) Στη θέση $x_1=+A$, οπότε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ, γίνεται A_1.

ii) Στη θέση $x_2=+ ½ A$, οπότε το νέο πλάτος γίνεται A_2.

iii) Στη θέση ισορροπίας x=0, οπότε τελικά έχουμε πλάτος ταλάντωσης A_3.

Να συγκρίνεται τα τρία παραπάνω πλάτη, A_1, A_2 και A_3.

Απάντηση:

Αρχικά το σύστημα των δύο σωμάτων, ταλαντώνεται σαν ένα σώμα με πλάτος Α και ενέργεια (D=k):

$$E_0 = \frac{1}{2}kA^2$$

i) Στην πρώτη περίπτωση που η αφαίρεση γίνεται στη θέση $x_1=+A$, το ελατήριο έχει επιμήκυνση Δl=A έχοντας και δυναμική ενέργεια $E_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}kA^2$, η οποία θα αποτελέσει και την νέα δυναμική ενέργεια ταλάντωσης. Η ενέργεια αυτή θα μετατραπεί σε κινητική στην θέση ισορροπίας, θέση και φυσικού μήκους του ελατηρίου, συνεπώς και το νέο πλάτος θα είναι επίσης Α, ισχύοντας $A_1=A$.

ii) Από την ενέργεια της πρώτης ταλάντωσης ελάχιστα πριν την απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 = E_0$$

Αλλά τότε αμέσως μετά την απομάκρυνση του $Σ_1$, το Σ απέχει επίσης κατά x_1 από την θέση ισορροπίας έχοντας επίσης ταχύτητα υ_1 και ενέργεια νέας ταλάντωσης:

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 < \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$
$$E_2 < E_0 \rightarrow$$
$$A_2 < A_0$$

iii) Η ενέργεια της τρίτης ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική ενέργεια του Σ αμέσως μετά την απομάκρυνση του $Σ_1$, με αποτέλεσμα να έχουμε:

$$E_3 = \frac{1}{2}kA_3^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{max}^2 < \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_{max}^2 = E_0 \rightarrow$$
$$A_3 < A$$

Βλέπουμε και πάλι το πλάτος να είναι μικρότερο από το αρχικό πλάτος Α, αλλά τι συμβαίνει σε σύγκριση με το πλάτος A_2; Ας υπολογίσουμε τις ενέργειες ταλάντωσης στις θέσεις 2 και 3.

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA^2\rightarrow\upsilon_1^2=\frac{k}{M+m}\left(A^2-x_1^2\right)\rightarrow\upsilon_1^2=\frac{k}{M+m}\left(A^2-\frac{A^2}{4}\right)\rightarrow$$

$$\upsilon_1^2=\frac{3}{4}\frac{k}{M+m}A^2\Rightarrow$$

$$E_2=\frac{1}{2}kA_2^2=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}M\frac{3}{4}\frac{k}{M+m}A^2+\frac{1}{2}k\frac{A^2}{4}\rightarrow$$

$$E_2=\frac{1}{8}kA^2\cdot\frac{4M+m}{M+m}\quad(1)$$

Ενώ για την iii) περίπτωση έχουμε:

$$E_3=\frac{1}{2}kA_3^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{max}^2=\frac{1}{2}M\left(\omega_0 A\right)^2=\frac{1}{2}M\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\right)^2A^2\rightarrow$$

$$E_3=\frac{1}{2}kA^2\cdot\frac{M}{M+m}\quad(2)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$E_2=\frac{1}{8}kA^2\cdot\frac{4M+m}{M+m}=\frac{1}{2}kA^2\cdot\frac{4M+m}{4M+4m}=\frac{1}{2}kA^2\cdot\frac{M+m/4}{M+m}>\frac{1}{2}kA^2\cdot\frac{M}{M+m}=E_3\rightarrow$$

$$A_2>A_3.$$

Τελικά διαπιστώνουμε ότι για τα πλάτη στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις ισχύει:

$$A=A_1>A_2>A_3.$$

dmargaris@gmail.com