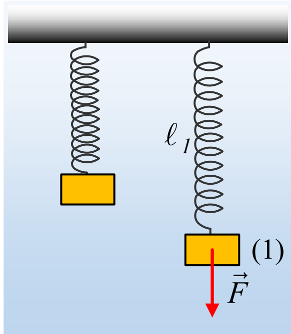
Ένα πολύ γνωστό περιβάλλον άσκησης.



Ένα σώμα μάζας 0,5kg ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Ασκούμε πάνω του μια μεταβλητή κατακόρυφη δύναμη F, φέρνοντάς το να ισορροπεί σε μια χαμηλότερη θέση (1), όπου το μήκος του ελατηρίου είναι ℓ_1=70cm, ενώ το μέτρο της δύναμης είναι ίσο με F=10N. Σε μια στιγμή t_0=0 η δύναμη καταργείται και το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται.

i) Ποια η αρχική επιτάχυνση του σώματος;

Αν το σώμα μέχρι τη στιγμή t_1=3,14s εκτελεί 5 πλήρεις ταλαντώσεις, να βρεθούν:

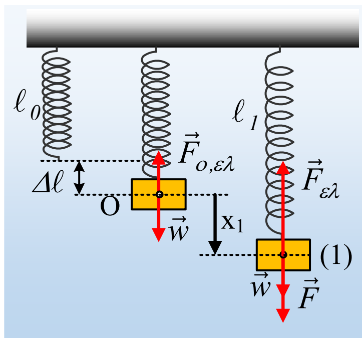
ii) Η σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου k (D=k), καθώς και το πλάτος της αατ, που εκτελεί το σώμα.

iii) Το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

iv) Να γίνει η γραφική παράσταση του μήκους του ελατηρίου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

v) Για πόσο χρονικό διάστημα, στη διάρκεια της περιόδου, η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα κάτω;

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί το ελατήριο στο φυσικό μήκος του, η θέση ισορροπίας Ο και η θέση όπου ασκείται η δύναμη F και το σώμα είναι ακίνητο, πριν την έναρξη της ταλάντωσης.

Για την ισορροπία στην θέση (1), ενώ ασκείται η δύναμη F, έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}-mg=F \quad (1)$$

Ενώ μόλις καταργηθεί η δύναμη F, με θετική φορά προς τα πάνω:

$$F_{\varepsilon\lambda}-mg=m\cdot\alpha_0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$F=ma_0 \rightarrow a_0=\frac{F}{m}=\frac{10N}{0,5kg}=20m/s^2.$$

ii) Η περίοδος ταλάντωση του σώματος είναι ίση:

$$T=\frac{t_1}{N}=\frac{3,15s}{5}=\frac{\pi}{5}\ s$$

Οπότε με δεδομένο ότι η κίνηση είναι αατ:

$$k=D=m\omega^2=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=m\left(\frac{2\pi}{\pi/5}\right)^2=0,5\cdot 10^2\,N/m=50N/m$$

Ενώ για το μέτρο της αρχικής επιτάχυνσης συνδέεται με το πλάτος:

$$|\alpha_0|=\omega^2 A \rightarrow A=\frac{|\alpha_0|}{\omega^2}=\frac{20}{10^2}m=0,2m$$

iii) Στην θέση ισορροπίας Ο, το ελατήριο έχει μια επιμήκυνση $\Delta\ell$, όπου:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow k \cdot \Delta\ell = mg \rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{0,5 \cdot 10}{50} m = 0,1m$$

Αλλά τότε, με βάση το πρώτο σχήμα, έχουμε:

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell + x_1 \rightarrow \quad (3)$$
$$\ell_0 = \ell - \Delta\ell - A = 0,7m - 0,1m - 0,2m = 0,4m$$

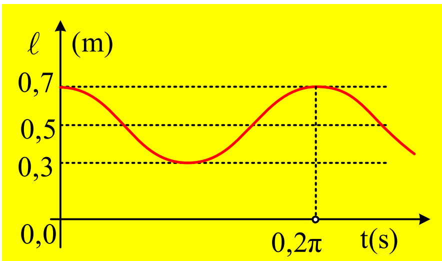
iv) Θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική, το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία θετική απομάκρυνσή του, δηλαδή για t=0, θα έχουμε x=+A, οπότε η σχέση $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ γίνεται:

$$x = A \cdot \eta\mu\left(10t + \varphi_0\right) \xrightarrow{t=0, x=A} A = A \cdot \eta\mu\left(10t + \varphi_0\right) \rightarrow \eta\mu\left(\varphi_0\right) = 1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

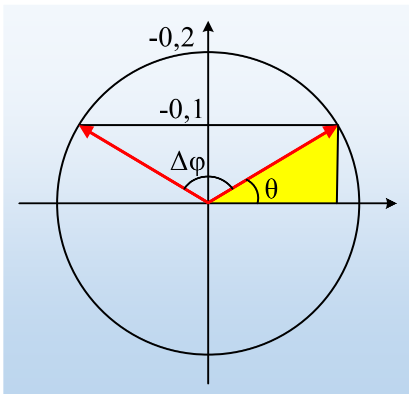
Αλλά τότε η εξίσωση (3) μας δίνει:

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell + x_1 = \ell_0 + \Delta\ell + A \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$
$$\ell = 0,4m + 0,1m + 0,2m \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,5 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσεις, είναι η παρακάτω:



v) Η δύναμη από το ελατήριο θα έχει φορά προς τα κάτω για όσο χρόνο το ελατήριο έχει συσπειρωθεί, δηλαδή έχει μήκος μικρότερο από 0,4m ή ισοδύναμα η απομάκρυνση είναι $x \geq -0,1$m. Αλλά παίρνοντας τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης, όπως στο διπλανό σχήμα, ο χρόνος που ζητάμε, είναι ο χρόνος για να διανύσει η ακτίνα την γωνία Δφ. Αλλά επειδή x=-0,1m ενώ A=0,2m, στο κίτρινο τρίγωνο, θ=30° και Δφ=120°=2π/3 rad. Οπότε για τον ζητούμενο χρόνο θα έχουμε:



$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{2\pi/3}{10} s = \frac{\pi}{15} s$$

dmargaris@gmail.com