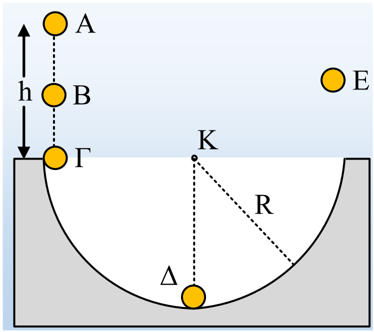
Το ημισφαίριο αλλάζει την πορεία της σφαίρας

Μια μικρή σφαίρα, μάζας m=0,5kg αφήνεται να πέσει από το σημείο Α και αφού διανύσει απόσταση h φτάνει στο άκρο ενός λείου ημισφαιρίου κέντρου Κ και ακτίνας R=0,6m, εντός του οποίου συνεχίζει την κίνησή της.



i) Να σχεδιάσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση της σφαίρας, στη θέση Β κατά την πτώση της, στο κατώτερο σημείο του ημισφαιρίου Δ, καθώς και σε μια θέση Ε, αφού εγκαταλείψει το ημισφαίριο και κινείται προς τα πάνω.

ii) Αν για το μέτρο της επιτάχυνσης στα σημεία Β και Δ, ισχύει $\alpha_\Delta=4\alpha_B$, να υπολογιστεί η απόσταση (ΑΓ)= h.

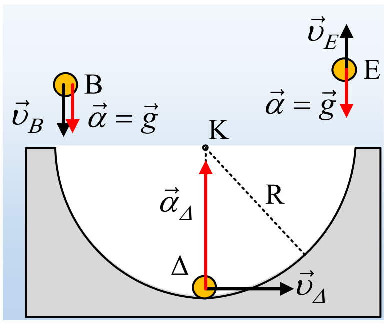
iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας στις θέσεις Β και Δ.

iv) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μεταξύ των θέσεων Γ και Δ.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ζητούμενα διανύσματα. Ας σημειωθεί ότι στις θέσεις Β και Ε, η σφαίρα έχει την ίδια επιτάχυνση, την επιτάχυνση της βαρύτητας, υπεύθυνη για την αύξηση και την μείωση του μέτρου της ταχύτητας, αντίστοιχα, ενώ στη θέση Δ η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, είναι δηλαδή κεντρομόλος επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή στην διεύθυνση της ταχύτητας.



ii) Για την κεντρομόλο επιτάχυνση στη θέση Δ έχουμε:

$$\alpha_\Delta = 4\alpha_B \rightarrow \frac{\upsilon_\Delta^2}{R} = 4g \rightarrow \upsilon_\Delta^2 = 4gR \quad (1)$$

Αλλά από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Α και Δ (έστω $U_\Delta=0$) παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow 0 + mg(h+R) = \frac{1}{2}m\upsilon_\Delta^2 + 0 \xrightarrow{(1)}$$

$$gh + gR = \frac{1}{2}4gR \rightarrow h = R = 0,6m$$

iii) Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για τη σφαίρα στις δύο θέσεις, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{p}_B}{dt} = \Sigma\vec{F} = m\vec{g} \rightarrow$$

$$\frac{dp_B}{dt} = mg = 0,5\cdot 10kg\cdot m/s^2 = 5kg\cdot m/s^2.$$

Διάνυσμα κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω, ίσο με το βάρος της σφαίρας.

$$\frac{d\vec{p}_\Delta}{dt} = \Sigma \vec{F}_\Delta = m\vec{\alpha}_\Delta \rightarrow$$

$$\frac{dp_B}{dt} = 4mg = 4 \cdot 0,5 \cdot 10 kg \cdot m/s^2 = 20 kg \cdot m/s^2 .$$

Διάνυσμα επίσης κατακόρυφο, με φορά προς τα πάνω (ίδια κατεύθυνση με την κεντρομόλο επιτάχυνση).

iv) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για να υπολογίσουμε τις ταχύτητες της σφαίρας στις θέσει Γ και Δ.

Αν U_Γ=0, τότε μεταξύ Α και Γ θα έχουμε:

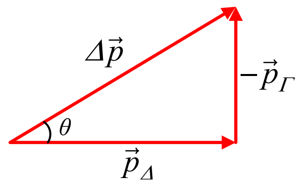
$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2} m\upsilon_\Gamma^2 \rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR} \quad (2)$$

Όμοια αν U_Δ=0 (στην χαμηλότερη θέση), τότε μεταξύ Α και Δ θα πάρουμε:

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow 0 + mg(h+R) = \frac{1}{2} m\upsilon_\Delta^2 \rightarrow \upsilon_\Delta = \sqrt{2g(R+h)} = \sqrt{4gR} \quad (3)$$

Εξάλλου για την μεταβολή της ορμής της σφαίρας, μεταξύ των δύο αυτών θέσεων, έχουμε:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_\tau - \vec{p}_\alpha \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_\Delta + (-\vec{p}_\Gamma)$$



Οπότε με βάση και το διπλανό σχήμα, βρίσκουμε:

$$|\Delta p| = \sqrt{(m\upsilon_\Delta)^2 + (m\upsilon_\Gamma)^2} = \sqrt{m^2(4gR + 2gR)} = m\sqrt{6gR} \rightarrow$$

$$|\Delta p| = 0,5\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 0,6} kg \cdot m/s = 3 kg \cdot m/s$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{|-p_\Gamma|}{|p_\Delta|} = \frac{m\sqrt{2gR}}{m\sqrt{4gR}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dmargaris@gmail.com