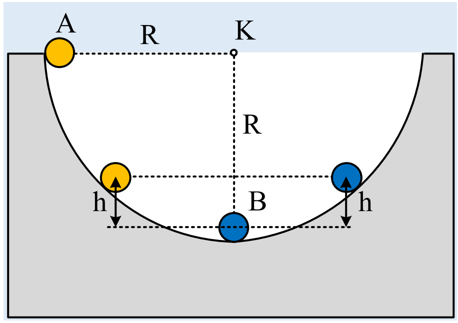
Μια κρούση στο βάθος ενός ημισφαιρίου



Από το άκρο ενός λείου ημισφαιρίου κέντρου Κ και ακτίνας R=1,25m, αφήνεται μια μικρή σφαίρα Α, μάζας m=0,1kg και αμελητέων διαστάσεων, να κινηθεί. Η σφαίρα φτάνοντας στο κατώτερο σημείο του ημισφαιρίου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα Β, ίδιας ακτίνας. Μετά την κρούση οι δυο σφαίρες φτάνουν στο ίδιο h, πριν κινηθούν ξανά προς τα κάτω.

Αν g=10m/^{2} ζητούνται:

i) Ποια σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη, κατά μέτρο, ταχύτητα μετά την κρούση;

ii) Να βρεθεί η μάζα Μ της Β σφαίρας.

iii) Να υπολογιστεί το ύψος h.

iv) Αν οι δύο σφαίρες συγκρούονται ξανά για δεύτερη φορά στο χαμηλότερο σημείο του ημισφαιρίου, να βρεθεί το ύψος h_1 στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα Α, μετά την κρούση.

Απάντηση:

i) Αν εφαρμόσουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για μια σφαίρα, έστω την Α, μεταξύ της χαμηλότερης θέσης, μετά την κρούση, όπου θεωρούμε (U=0) και σε ύψος h, θα έχουμε:

$$K_\kappa + U_\kappa = K_\pi + U_\pi \rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 = 0 + mgh \rightarrow$$
$$h = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} \quad (1)$$

Αλλά αν οι δυο σφαίρες φτάνουν στο ίδιο ύψος, οπότε με βάση την τελευταία εξίσωση, σημαίνει ότι οι σφαίρες ξεκινούν με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $|\upsilon_1'| = |\upsilon_2'|$.

ii) Η ταχύτητα της Α σφαίρας ελάχιστα πριν την κρούση, υπολογίζεται από ΑΔΜΕ, από το ανώτερο σημείο, μέχρι το χαμηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς:

$$K_\pi + U_\pi = K_\kappa + U_\kappa \rightarrow 0 + mgR = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 \rightarrow$$
$$\upsilon_1 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1{,}25}m/s = 5m/s$$

Ενώ για τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κεντρική ελαστική τους κρούση, θα έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 \quad (2) \qquad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 \quad (3)$$

Όμως για τις ταχύτητες αυτές ισχύει $\upsilon_1{'}=-\upsilon_2$, οπότε από τις σχέσεις (2) και (3) θα πάρουμε:

$$\frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 = -\frac{2m}{m+M}\upsilon_1 \quad \rightarrow m-M = 2m \rightarrow M = 3m = 0,3kg$$

Αξίζει να τονισθεί ότι οι δυο σφαίρες μετά την κρούση, θα κινηθούν προς αντίθετες κατευθύνσεις.

iii) Με αντικατάσταση στην (2) με την βοήθεια της (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 = \frac{m-3m}{m+3m}\upsilon_1 = -\frac{1}{2}\cdot 5m/s = -2,5m/s$$

Και η σχέση (1) δίνει

$$h = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} = \frac{2,5^2}{2\cdot 10}m = \frac{1,25}{4}m \approx 0,06m$$

iv) Ξανά από την διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε ότι οι δυο σφαίρες θα φτάσουν στο χαμηλότερο σημείο με ταχύτητες μέτρων ίσων με αυτές που είχαν αμέσως μετά την πρώτη κρούση, αλλά με αντίθετες κατευθύνσεις. Έτσι με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, οι σφαίρες θα έχουν ταχύτητες με αλγεβρικές τιμές:

$$u_1 = -\upsilon_1' = 2,5m/s \qquad \kappa\alpha\iota \;\; u_2 = -\upsilon_2' = -2,5m/s$$

Αλλά τότε η Α σφαίρα, μετά την 2η κρούση θα αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_1'' = \frac{m-M}{m+M}u_1 + \frac{2M}{m+M}u_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1'' = \frac{m-3m}{m+3m}(2,5)m/s + \frac{6m}{m+3m}(-2,5)m/s = -5m/s$$

Αντίθετη, της ταχύτητας που είχε η σφαίρα, πριν την 1η κρούση, οπότε με διατήρηση της ενέργειας (αντίστροφη πορεία σε σχέση το ερώτημα ii), θα βρούμε ότι η σφαίρα επιστρέφει στο άκρο του ημισφαιρίου, όπου και η αρχική θέση, από την οποία αφήνεται να κινηθεί! Πράγματι:

$$K_\kappa + U_\kappa = K_\pi + U_\pi \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1''^2 + 0 = mgH + 0 \rightarrow$$

$$H = \frac{\upsilon_1''^2}{2g} = \frac{5^2}{2\cdot 10} = 1,25m = R$$

dmargaris@gmail.com