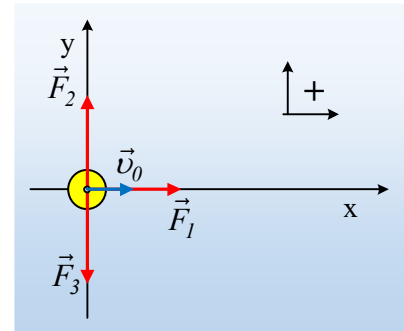


Τρεις δυνάμεις, τρεις κινήσεις

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά μήκος ενός άξονα x με ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ και τη στιγμή $t=0$ φτάνει σε ένα σημείο O , το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή των οριζοντίων ορθογωνίων αξόνων x , y , όπως στο σχήμα (σε κάτωψη). Στη θέση αυτή μπορεί να δεχτεί την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης, σε τρεις διαφορετικές εκδοχές.



A) Σταθερή δύναμη όπως η $F_1=2\text{N}$, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα v_0 .

B) Σταθερή δύναμη στην διεύθυνση y , όπως η F_2 μέτρου 2N , κάθετη στην αρχική ταχύτητα v_0 .

Γ) Δύναμη σταθερού μέτρου $F_3=2\text{N}$, η οποία διατηρείται διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα του σώματος

a) Για τη στιγμή $t_1=2\text{s}$, να βρεθούν και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις:

i) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

ii) Η θέση του σώματος.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος στην διεύθυνση x , από $0-2\text{s}$.

b) Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $x=x(t)$ για την τετμημένη του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και για τις τρεις περιπτώσεις, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=15\text{ s}$.

Απάντηση:

Το σώμα, σε κάθε περίπτωση, θα αποκτήσει επιτάχυνση στην διεύθυνση της ασκούμενης δύναμης, με μέτρο:

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{2}{2} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Με βάση την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή και σε συνδυασμό με την επιτάχυνση που αποκτά, το σώμα:

a) Στην A) περίπτωση, το σώμα θα κινηθεί ευθύγραμμα, κατά μήκος του άξονα x , εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_1 = v_0 + at \quad (1) \quad x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

Στην B) περίπτωση το σώμα θα έχει σταθερή επιτάχυνση στην διεύθυνση του άξονα y , αλλά τότε με βάση την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του σώματος, θα έχουμε:

Άξονας x	Άξονας y
$v_{x2} = v_0 \quad (3)$	$v_{y2} = a t \quad (5)$
$x_2 = v_0 t \quad (4)$	$y_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (6)$

Στην Γ) περίπτωση η δύναμη παραμένει διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα, άρα πρόκειται για κεντρομόλο δύναμη, η οποία μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της, συνεπώς το σώμα θα

εκτελέσει μια ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα:

$$F = \frac{mv^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv^2}{F} = \frac{2 \cdot 2^2}{2} m = 4m$$

i) Για το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, με βάση τα παραπάνω:

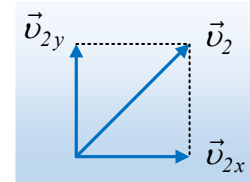
- Στην Α) περίπτωση:

$$v_1 = v_0 + at = 2m/s + 1 \cdot 2m/s = 4m/s$$

- Στην Β) περίπτωση από τις εξισώσεις (3) και (5) παίρνουμε:

$$v_{2x} = v_0 = 2m/s \text{ και } v_{y2} = a \cdot t = 1 \cdot 2m/s = 2m/s.$$

$$v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} m/s = 2\sqrt{2} m/s$$



- Στην περίπτωση Γ) το μέτρο της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, οπότε $v_3 = 2m/s$.

ii) Για την θέση του σώματος θα έχουμε:

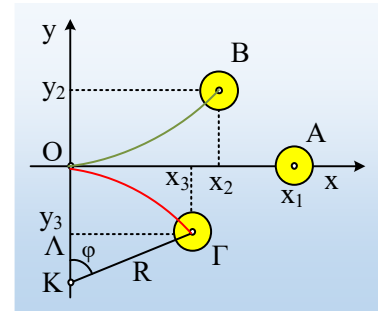
- Στην Α) περίπτωση:

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 2 \cdot 2m + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 m = 6m$$

- Στην Β) περίπτωση από τις εξισώσεις (4) και (6) παίρνουμε:

$$x_2 = v_0 t = 2 \cdot 2m = 4m$$

$$y_2 = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 m = 2m$$



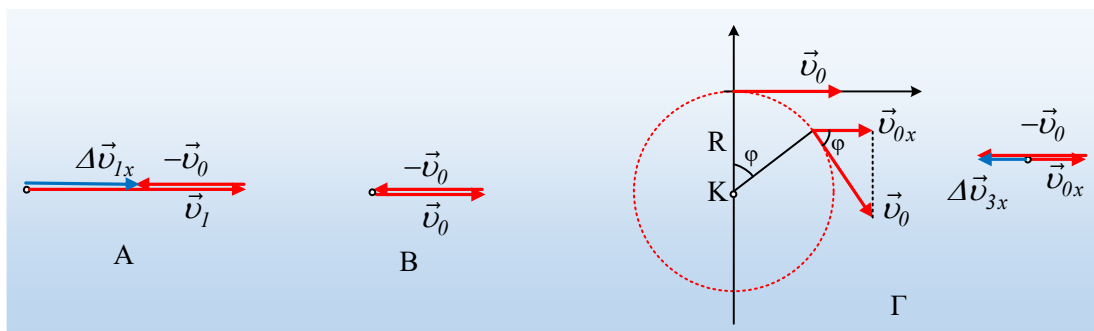
- Στην περίπτωση Γ) το σώμα θα διαγράψει κυκλική τροχιά (κόκκινη γραμμή), με ακτίνα $R=4m$ και κέντρο το σημείο Κ, πάνω στον άξονα y , με $y_K = -4m$, διαγράφοντας τόξο μήκους:

$$s = v_0 t = 2 \cdot 2m = 4m$$

Έχοντας διαγράψει επίκεντρη γωνία $\varphi = \omega t = \frac{v_0}{R} t = \frac{1}{2} t$ (S.I.) και με αντικατάσταση $t=2s$, παίρ-

νουμε $\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ rad} = 1 \text{ rad}$.

iii) Για την μεταβολή της ταχύτητας στην διεύθυνση x , θα έχουμε με βάση το παρακάτω σχήμα:



$$\Delta \vec{v}_x = \vec{v}_{τελ,x} - \vec{v}_0 = \vec{v}_{τελ,x} + (-\vec{v}_0) \rightarrow$$

$$A): \Delta v_1 = v_{1,\tau} - v_0 = 4m/s - 2m/s = 2m/s$$

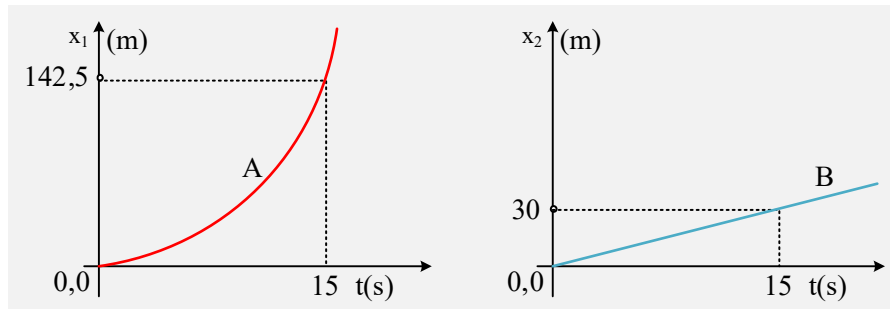
$$B): \Delta v_2 = v_{2,\tau} - v_0 = v_0 - v_0 = 0$$

$$\Gamma): \Delta v_3 = v_{3,\tau} - v_0 = v_0 \sin \varphi_1 - v_0 = 2 \cdot 0,54m/s - 2m/s = -0,92m/s$$

iv) Για το σώμα στην Α) περίπτωση, η συνάρτηση $x=x(t)$ είναι δευτέρου βαθμού, άρα θα έχουμε μια παραβολή, όπου για $t_2=15s$ θα έχουμε:

$$x_{1,2} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 2 \cdot 15m + \frac{1}{2} 1 \cdot 15^2 m = 142,5m$$

Και γραφική παράσταση όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα.



Στην Β) περίπτωση στη διεύθυνση x το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, $x=v_0 \cdot t$, συνάρτηση πρώτου βαθμού και γραφική παράσταση ευθεία, όπως στο δεύτερο σχήμα, αφού:

$$x_{2,2} = v_0 t = 2 \cdot 15m = 30m$$

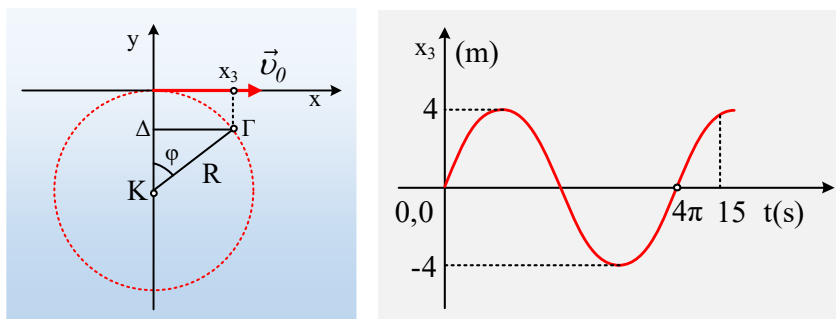
Η τετμημένη x_3 στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης, με βάση το πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, είναι ίση:

$$x_3 = (r \Delta) = R \cdot \eta \mu \varphi = 4 \cdot \eta \mu (\frac{1}{2} t) \text{ (S.I.)}$$

συνεπώς η μεταβολή είναι ημιτονοειδής με μέγιστη τιμή τα 4m και με περίοδο:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 4}{2} s = 4\pi s$$

Με βάση αυτά σχεδιάζουμε το δεξιό από τα παρακάτω σχήματα.



dmargaris@gmail.com