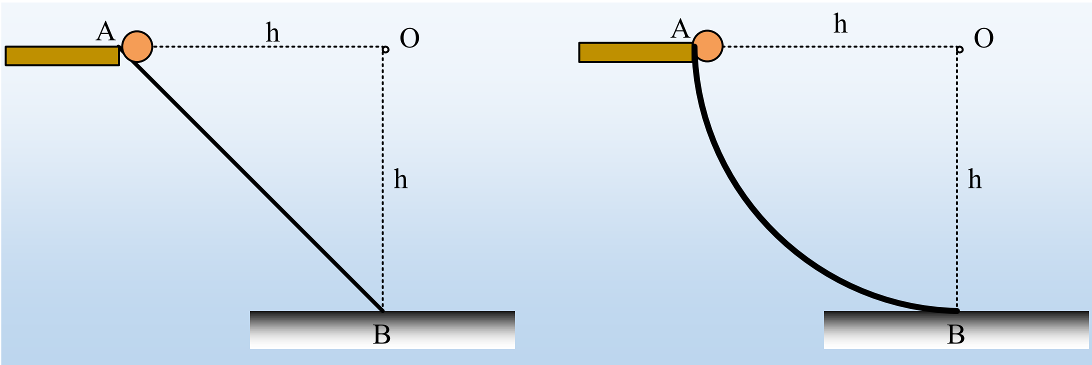
Μετακίνηση σφαίρας σε δύο διαφορετικές διαδρομές

Μια μικρή σφαίρα μάζας 100g αφήνεται να κινηθεί από σημείο Α οριζοντίου επιπέδου, που βρίσκεται σε ύψος h=1,25m από το έδαφος και να φτάσει στο σημείο Β του εδάφους.



Η διαδρομή μπορεί να είναι ευθύγραμμη, κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, όπως στο πρώτο σχήμα ή να είναι κυκλική, κέντρου Ο και ακτίνας R=h, όπως στο δεύτερο σχήμα, ενώ τριβές δεν υπάρχουν.

i) Σε ποια περίπτωση η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος με μεγαλύτερη ταχύτητα;

ii) Κάποια στιγμή η σφαίρα περνάει από το μέσον Μ της διαδρομής ΑΒ. Για την θέση αυτή να υπολογιστούν, για κάθε μια διαδρομή χωριστά:

α) Η ταχύτητα της σφαίρας.

β) Η κάθετη αντίδραση που ασκείται στη σφαίρα από το κεκλιμένο επίπεδο και από την επιφάνεια στήριξης στην κυκλική διαδρομή.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας της σφαίρας.

Δίνεται ότι η σφαίρα δεν στρέφεται κατά την κίνησή της, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Αφού κατά την κίνηση της σφαίρας δεν ασκούνται τριβές, η μηχανική ενέργεια δεν μεταβάλλεται, οπότε θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική στο έδαφος, θα έχουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

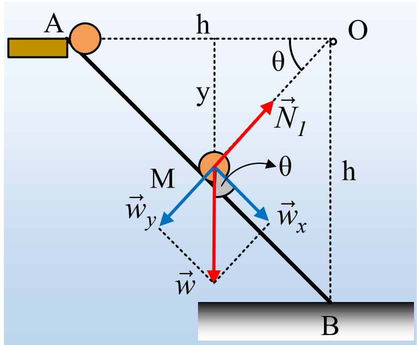
$$0 + mgh = \frac{1}{2} m\upsilon_B^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25}\, m/s = 5m/s.$$

Στην παραπάνω διαπραγμάτευση πουθενά δεν λάβαμε υπόψη τη μορφή της τροχιάς, συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις η σφαίρα φτάνει με ταχύτητα του ίδιου μέτρου στο έδαφος.

ii) Ας μελετήσουμε πρώτα την κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο ΑΒ.

- Στο παρακάτω σχήμα έχουμε πάρει τη σφαίρα στο μέσον της διαδρομής ΑΒ. Τότε η ΟΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΒ, οπότε είναι ταυτόχρονα διχοτόμος της γωνίας Ο (άρα θ=45°) και ύψος του τριγώνου.



α) Με βάση το διπλανό σχήμα y= ½ (ΟΒ) (το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το μέσον της μιας πλευράς ΑΒ και είναι παράλληλο προς την πλευρά ΟΒ), οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την σφαίρα, μεταξύ των θέσεων Α και Μ, θεωρώντας ότι U_M=0, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_M + U_M$$

$$0 + mgy = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot {}^{1}\!/_{2}\, 1{,}25}\, m/s = \sqrt{12{,}5}\, m/s.$$

β) Η σφαίρα ισορροπεί στην διεύθυνση y, την κάθετη στο επίπεδο, οπότε:

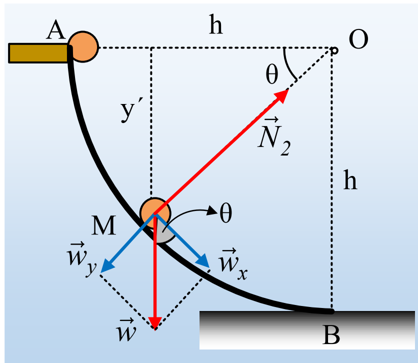
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 - w_y = 0 \rightarrow$$

$$N_1 = mg \cdot \eta\mu\theta = 0{,}1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} N = \frac{\sqrt{2}}{2} N = 0{,}71 N$$

γ) Η σφαίρα επιταχύνεται στην διεύθυνση της κίνησής της, στην διεύθυνση x και η επιτάχυνση αυτή έχεις ως αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητάς της. Έτσι για το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας έχουμε:

$$\frac{d|\upsilon_1|}{dt} = a_1 = \frac{F_x}{m} = \frac{w_x}{m} = \frac{mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{m} = g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} m/s^2 = 5\sqrt{2} m/s^2.$$

- Ας έρθουμε τώρα στην κυκλική κίνηση του δεύτερου σχήματος, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το Μ είναι το μέσον του τεταρτοκυκλίου, τότε θ=45°. Αλλά τότε:



$$y' = R \cdot \eta\mu\theta = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

α) Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την σφαίρα, μεταξύ των θέσεων Α και Μ, θεωρώντας ότι U_M=0, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_M + U_M$$

$$0 + mgy' = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gy'} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}\, 1{,}25}\, m/s = \sqrt{12{,}5\sqrt{2}}\, m/s.$$

β) Στην διεύθυνση της ακτίνας ΜΟ, η συνισταμένη δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου. Δηλαδή:

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_2^2}{R} \rightarrow N_2 - w_y = m\frac{\upsilon_2^2}{R} \rightarrow$$

$$N_2 = mg \cdot \eta\mu\theta + m\frac{\upsilon_2^2}{R} \rightarrow$$

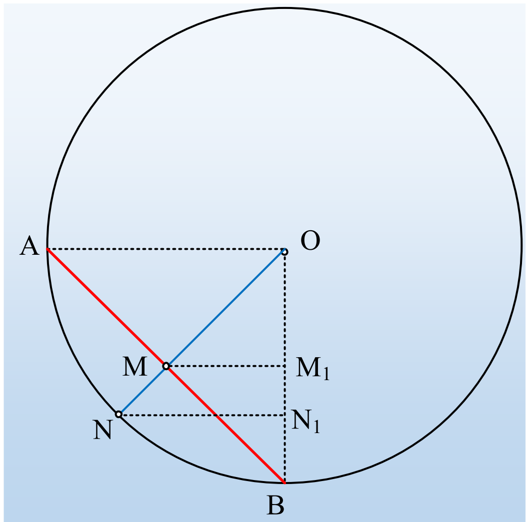
$$N_2 = 0,1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} N + 0,1\frac{\left(\sqrt{12,5\sqrt{2}}\right)^2}{1,25} N = \frac{3\sqrt{2}}{2} N \approx 2,1N$$

γ) Η σφαίρα, εκτός της παραπάνω αναφερόμενης κεντρομόλου επιτάχυνσης, έχει και επιτάχυνση στην διεύθυνση της κίνησής της, στην διεύθυνση x και η επιτάχυνση αυτή έχεις ως αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητάς της. Έτσι για το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας έχουμε:

$$\frac{d\left|\upsilon_2\right|}{dt} = a_{x,2} = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{w_x}{m} = \frac{mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{m} = g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} m/s^2 = 5\sqrt{2} m/s^2.$$

Σχόλια:

1) Αξίζει να προσεχθεί ότι παρότι μιλάμε για τα μέσα των δύο διαδρομών, σε αυτές αντιστοιχούν διαφορετικές κατακόρυφες μετατοπίσεις. Αρκεί βέβαια να δούμε τι συμβαίνει με το μέσον μιας χορδής Μ και το αντίστοιχο μέσον του τόξου Ν, στο διπλανό σχήμα.
Είναι φανερό ότι $(ON_1)>(OM_1)$, πράγμα που οδηγεί σε μεγαλύτερη ταχύτητα στο μέσο της κυκλικής διαδρομής, σε σχέση με το μέσον του κεκλιμένου επιπέδου.



2) Η επιτάχυνση α_x η οποία έχει την διεύθυνση της ταχύτητας στην κυκλική κίνηση, υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, ονομάζεται **επιτρόχια επιτάχυνση**. Το διανυσματικό άθροισμα της επιτρόχιας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης, μας δίνει την επιτάχυνση στο μέσον Μ του τόξου του τεταρτοκυκλίου.

3) Παραπάνω βρήκαμε ότι η επιτρόχια επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση, είναι ίση με την επιτάχυνση στο Μ στην κίνηση στο κεκλιμένο. Αλλά αυτό συμβαίνει στιγμιαία και δεν πρέπει να το γενικεύουμε.
Η επιτάχυνση στο κεκλιμένο επίπεδο είναι σταθερή σε κάθε θέση. Αντίθετα η επιτρόχια επιτάχυνση στη διάρκεια της παραπάνω κυκλικής κίνησης μεταβάλλεται από αρχική τιμή α_{0x}=g, μέχρι την τελική τιμή $\alpha_{\tau x}$=0!

dmargaris@gmail.com