

### Ένα πρόβλημα οριζόντιας βολής.

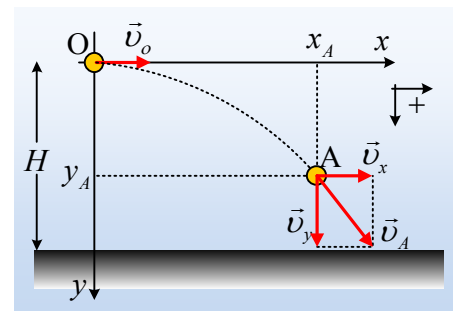
Από ορισμένο ύψος  $H$  από το έδαφος, εκτοξεύεται ένα σώμα μάζας  $0,1\text{kg}$  οριζόντια με ταχύτητα  $v_0$ . Μετά από χρονικό διάστημα  $2\text{s}$ , το σώμα βρίσκεται σε σημείο  $A$  έχοντας ταχύτητα  $25\text{m/s}$  απέχοντας κατά  $6\text{m}$  από το έδαφος.

Αν  $g=10\text{m/s}^2$  ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα να υπολογιστούν:

- i) Η αρχική ταχύτητα και το αρχικό ύψος από το οποίο έγινε η εκτόξευση.
- ii) Το έργο του βάρους στο χρονικό διάστημα των  $2\text{s}$ .
- iii) Η μέση ισχύς του βάρους από  $0-2\text{s}$  και η (στιγμιαία) ισχύς του στη θέση  $A$ .
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη θέση  $A$ .

#### Απάντηση:

- i) Έστω  $O$  το σημείο εκτόξευσης, το οποίο θεωρούμε ως αρχή ενός συστήματος αξόνων  $xy$ , με τον προσανατολισμό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση ως επαλληλία μιας ευθύγραμμης ομαλής στην οριζόντια διεύθυνση και μιας ελεύθερης πτώσης στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε:



Άξονας $x$	Άξονας $y$
$v_x=v_0$ (1)	$v_y=gt$ (3)
$x=v_0t$ (2)	$y=\frac{1}{2}gt^2$ (4)

Από την σχέση (3) παίρνουμε  $v_y=gt=10 \cdot 2\text{m/s}=20\text{m/s}$ . Αλλά:

$$v_A^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow$$

$$v_x = \sqrt{v_A^2 - v_y^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} \text{ m/s} = 15 \text{ m/s} = v_0$$

Εξάλλου από την (4) με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$y_A = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \text{ m} = 20\text{m}$$

$$\text{οπότε } H=y_A + h_A=20\text{m}+6\text{m}=26\text{m}.$$

- ii) Το έργο του βάρους (συντηρητική δύναμη) δεν εξαρτάται από τη διαδρομή και είναι ίσο με:

$$W = U_O - U_A = mgH - mgh = mgy \rightarrow$$

$$W = mgy = 0,1 \cdot 10 \cdot 20 \text{ J} = 20 \text{ J}.$$

Εναλλακτικά το έργο του βάρους θα μπορούσε να υπολογιστεί, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w \rightarrow$$

$$W_w = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_O^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} m g^2 t^2 \rightarrow$$

$$W_w = m g \cdot \frac{1}{2} g t^2 = m g y$$

iii) Η μέση ισχύς του βάρους στη διάρκεια των 2s είναι:

$$P_m = \frac{\Delta W_w}{\Delta t} = \frac{20J}{2s} = 10W$$

Ενώ η στιγμιαία ισχύς τη χρονική στιγμή που περνά από την θέση A:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{w \cdot ds \cdot \sigma \nu \nu \theta}{dt} = w \cdot v_A \cdot \sigma \nu \nu \theta = m g \cdot v_A \cdot \sigma \nu \nu \theta$$

Όπου  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει το βάρος με την διεύθυνση της ταχύτητας. Αλλά τότε:

$$P = m g \cdot v_A \cdot \sigma \nu \nu \theta = m g v_y = 0,1 \cdot 10 \cdot 20W = 20W .$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι ίσος:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -P_w = -20J/s$$

Αντίστοιχα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας σε μια θέση (με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε.) είναι:

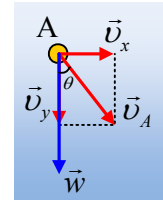
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_w}{dt} = P_w = +20J/s$$

### Σχόλια:

1) Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης μεταξύ δύο θέσεων, συνδέεται με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, με τη σχέση:

$$W = U_{ap} - U_{\tau\epsilon\lambda} = -(U_{\tau\epsilon\lambda} - U_{ap}) = -\Delta U$$

2) Το αποτέλεσμα στο τελευταίο ερώτημα, λέει απλά ότι στη θέση A, η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά 20J/s, ενώ η κινητική ενέργεια αυξάνεται κατά 20J/s, πράγμα αναμενόμενο, αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται (η μοναδική δύναμη, το βάρος είναι συντηρητική) και κατά την πτώση η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική.



[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)