Παίζοντας με το 2ο νόμο για την περιστροφική κίνηση.

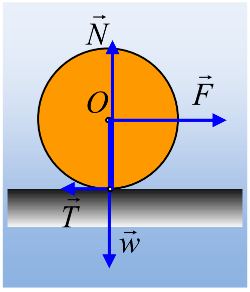
Αποκλειστικά μόνο για Καθηγητές.

Κάθε χρόνο επανέρχεται στο προσκήνιο το θέμα εφαρμογής του 2ου νόμου για την στροφική κίνηση και η αποφυγή χρήσης του, σε περίπτωση λανθασμένης εφαρμογής.

Ας διερευνήσουμε τα όρια λοιπόν εφαρμογής του, μέσα από κάποια παραδείγματα εφαρμόζοντάς τον σε ένα πρόβλημα, ως προς διαφορετικά σημεία.

Το πρόβλημα:

Ένας κύλινδρος ακτίνας R=20cm και μάζας 2kg, κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση στον άξονά του οριζόντιας δύναμης F=16N, ενώ η ασκούμενη τριβή ολίσθησης έχει μέτρο T= ¼ F= 4N. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από την εξίσωση I= ½ mR^2. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.



Απάντηση:

i) Ο γνωστός σε όλους τρόπος, είναι να θεωρήσουμε σύνθετη την κίνηση, αποτελούμενη από μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου, άξονας που περνά και από το κέντρο μάζας Ο του κυλίνδρου.

Έτσι για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

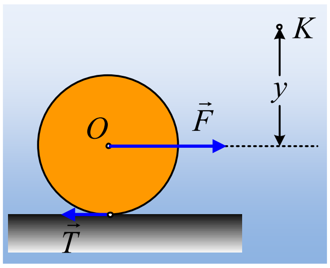
$$\Sigma F_x = m\cdot \alpha_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F-T}{m} = \frac{16-4}{2} m/s^2 = 6m/s^2$$

Ενώ για την περιστροφική κίνηση, θεωρώντας την ωρολογιακή φορά θετική παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_{cm}\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow TR = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (1)$$

$$TR = \tfrac{1}{2} mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T}{mR} = \frac{2\cdot 4}{2\cdot 0{,}2} rad/s^2 = 20 rad/s^2.$$

ii) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση δουλεύοντας με σημείο αναφοράς το **σταθερό** σημείο Κ του σχήματος, με τη βοήθεια της στροφορμής.



Η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς το σημείο Κ είναι ίση με:

$$L_K = I_{cm}\omega - m\upsilon_{cm} y$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της:

$$\frac{dL_K}{dt} = I_{cm}\frac{d\omega}{dt} - m\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} y$$

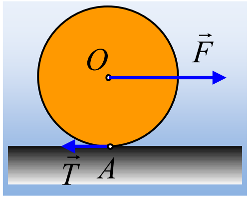
Όμως ο γενικευμένος νόμος μας δίνει $\frac{dL_K}{dt} = \Sigma\tau$ συνεπώς:

$$I_{cm}\frac{d\omega}{dt} - m\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} y = -F\cdot y + T\cdot(y+R) \rightarrow$$

$$I_{cm}\frac{d\omega}{dt}-(\Sigma F_x)y=(T-F)y+TR\rightarrow$$

$$I_{cm}\frac{d\omega}{dt}=TR$$

Αξίζει να προσέξουμε, ότι ξεκινώντας από την στροφορμή ενός τυχαίου σημείου Κ, φτάσαμε ξανά στην εξίσωση (1). Και αυτό βγήκε για το τυχαίο σημείο. Που σημαίνει για οποιοδήποτε σημείο επιλέξει ο καθένας.



Έτσι για παράδειγμα, αν επιλέξουμε να εφαρμόσουμε το γενικευμένο νόμο ως προς το σημείο επαφής Α με το έδαφος (σταθερό σημείο του εδάφους), θα έχουμε:

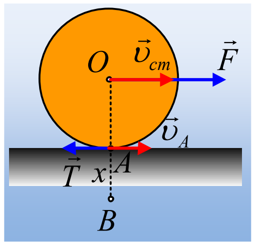
$$L_A=I_{cm}\omega+m\upsilon_{cm}R\rightarrow$$

$$\frac{dL_A}{dt}=I_{cm}\frac{d\omega}{dt}+m\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}R=FR\rightarrow$$

$$I_{cm}\frac{d\omega}{dt}+(F-T)R=FR\ \rightarrow$$

$$I_{cm}\frac{d\omega}{dt}=T\,R$$

iii) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση, δουλεύοντας με σημείο αναφοράς το στιγμιαίο άξονα περιστροφής Β.



Στιγμιαίος άξονας περιστροφής, είναι ένα σημείο Β, ως προς το οποίο θεωρούμε ότι στρέφεται ο κύλινδρος. Προσοχή: Η κίνηση θεωρείται πια απλή, μόνο περιστροφική γύρω από το Β.

Τώρα, το σημείο Ο και το σημείο Α, εκτελούν κυκλικές κινήσεις με ακτίνες x+R και x, όπως στο σχήμα, οπότε:

$$\upsilon_o=\upsilon_{cm}=\omega\cdot(R+x)\quad(2)\qquad \text{και } \upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega R=\omega\cdot x\quad(3)$$

Αλλά $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}t=6t$ και $\upsilon_A=\alpha_{cm}t-\alpha_{\gamma\omega\nu}t\cdot R=6t-4t=2t$

Και με διαίρεση των (2) και (3) με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων παίρνουμε:

$$\frac{\upsilon_{cm}}{\upsilon_A}=\frac{\omega(R+x)}{\omega x}=\frac{6t}{2t}\rightarrow$$

$$\frac{R+x}{x}=3\rightarrow x=\frac{R}{2}=0{,}1m$$

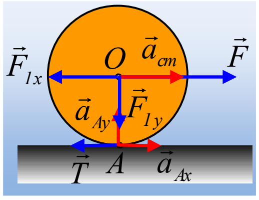
Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα και για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το Β παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_B=I_B\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow$$

$$F\cdot(R+x)-T\cdot x=[\tfrac{1}{2}mR^2+m(R+x)^2]\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{F(R+x)-Tx}{{}^{1}\!/_{2}mR^2+m(R+x)^2}=\frac{16\cdot 0{,}3-4\cdot 0{,}1}{\frac{1}{2}2\cdot 0{,}2^2+2\cdot 0{,}3^2}rad/s^2=20rad/s^2.$$

iv) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση με σημείο αναφοράς, το σημείο Α, σημείο επαφής του κυλίνδρου, αλλά τώρα το σημείο Α, είναι σημείο του κυλίνδρου.



Για ένα παρατηρητή στο Α, στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου ασκείται δύναμη d' Alembert με συνιστώσες $\vec{F}_{1x}=-m\vec{a}_{Ax}$ και $\vec{F}_{1y}=-m\vec{a}_{Ay}$, όπως στο σχήμα, όπου $\alpha_{Ax}=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ και $\alpha_y=\omega^2R$.

Για τον παρατηρητή αυτόν, ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω του, έχοντας στροφορμή, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L_A=I_A\cdot\omega\rightarrow$$

$$\frac{dL_A}{dt}=I_A\frac{d\omega}{dt}=\Sigma\tau\rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\right)\cdot\frac{d\omega}{dt}=FR-F_{1x}R\rightarrow$$

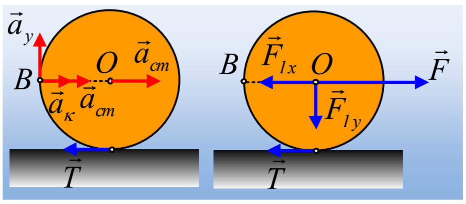
$$\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu}=FR-ma_{cm}R+ma_{\gamma\omega\nu}R^2\rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu}=FR-(F-T)R+ma_{\gamma\omega\nu}R^2\rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu}=TR+ma_{\gamma\omega\nu}R^2\rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{2T}{mR}=\frac{2\cdot 4}{2\cdot 0{,}2}rad/s^2=20rad/s^2.$$

v) Στην ίδια γραμμή, να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση, με βάση το σημείο Β στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, όπως στο σχήμα.



Το σημείο Β έχει τις επιταχύνσεις που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, όπου $\alpha_\kappa=\omega^2R$ και $\alpha_y=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$. Συνεπώς για τον κινούμενο παρατηρητή στο Β, στο κέντρο Ο του κυλίνδρου ασκείται δύναμη d' Alembert, με συνιστώσες $\vec{F}_{1x}=-m(\vec{a}_{cm}+\vec{a}_\kappa)$ και $\vec{F}_{1y}=-m\vec{a}_{Ay}$.

Για τον παρατηρητή αυτόν, ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω του, έχοντας στροφορμή, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L_B=I_B\cdot\omega\rightarrow$$

$$\frac{dL_B}{dt}=I_B\frac{d\omega}{dt}=\Sigma\tau\rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\right)\cdot\frac{d\omega}{dt}=TR+F_{1y}R\rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu}=TR+ma_{\gamma\omega\nu}R^2\rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{2T}{mR}=\frac{2\cdot 4}{2\cdot 0{,}2}rad/s^2=20rad/s^2.$$

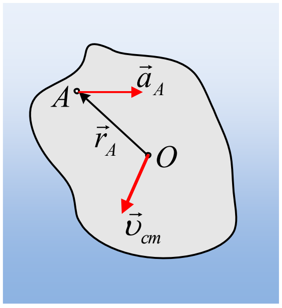
Σχόλια:

1) Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις η ροπή αδράνειας του στερεού, ως προς τον άξονα που θεωρούσαμε την περιστροφή, ήταν σταθερή, διαφορετικά θα έπρεπε να πάρουμε $\frac{dL}{dt}=\frac{d(I\omega)}{dt}=\frac{dI}{dt}\omega+I\frac{d\omega}{dt}$

2) Στα παραπάνω, μελετήσαμε τη στροφική κίνηση του στερεού, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο νόμο ως προς ένα σημείο του στερεού και ακολουθήθηκε μια συγκεκριμένη αποδεικτική πορεία. Χρησιμοποιήσαμε έναν κινούμενο παρατηρητή στο συγκεκριμένο σημείο του στερεού και σχεδιάσαμε την αδρανειακή δύναμη που αυτός «βλέπει».

Όλα αυτά θα μπορούσε να τα αντιμετωπίσει κάποιος με λίγα περισσότερα μαθηματικά, αφού μπορεί να εφαρμόσει το 2ο νόμο για ένα σημείο ΕΠΙ του στερεού, με τη μορφή:

$$(\Sigma\vec{\tau})_A=\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_A-m\cdot\vec{r}_A\times\vec{a}_A$$



Όπου $(\Sigma\vec{\tau})_A$ η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό ως προς το σημείο Α, $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_A$ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Α και $\vec{r}_A$ το διάνυσμα θέσης του Α, ως προς το κέντρο μάζας Ο, όπως στο διπλανό σχήμα.

Στην πράξη η παραπάνω εξίσωση μας λέει, ότι ο γενικευμένος νόμος παίρνει τη μορφή του σχολικού βιβλίου για επίπεδη κίνηση στερεού, $(\Sigma\tau)_A=\left(\frac{dL}{dt}\right)_A$ σε δυο περιπτώσεις:

Α) Όταν το σημείο Α δεν έχει επιτάχυνση. Κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν έχουμε έναν σταθερό ακλόνητο άξονα που περνάει από το Α.

Β) Όταν η επιτάχυνση του Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΑΟ, που συνδέει το Α με το κέντρο μάζας Ο.

Για αναλυτική μελέτη μπορεί κάποιος να διαβάσει ένα αξιόλογο αρχείο που έχουν κατατεθεί στο δίκτυό μας από το Διονύση Μητρόπουλο εδώ.

Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής (Πλαίσιο – παραδείγματα)

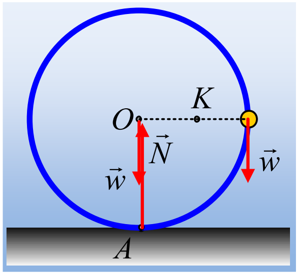
Αλλά το ερώτημα, που θα μπορούσε κάποιος να θέσει, είναι γιατί να δουλέψουμε με σημείο του στερεού και να μην μείνουμε ως προς το κέντρο μάζας; Ας το δούμε:

Ένα δεύτερο πρόβλημα σε δύο παραλλαγές.

Τι γίνεται τώρα, αν αντί να έχουμε ένα ομογενή κύλινδρο, όπως παραπάνω, έχουμε ένα δακτύλιο ακτίνας R και μάζας m, όπου σε κάποιο σημείο της περιφέρειάς του, έχει προσδεθεί σημειακή μάζα m;

1) Έστω ότι ένα τέτοιο στερεό S, με ακτίνα R=1m, το οποίο αφήνεται να κινηθεί από τη θέση του σχήματος, όπου η σημειακή μάζα βρίσκεται στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού S.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό S, ενώ K είναι το κέντρο μάζας του.

Προφανώς μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση σύνθετη, μεταφορική και περιστροφική γύρω από το κέντρο μάζας K! Προσοχή, όχι γύρω από τον άξονα περιστροφής του O, αλλά γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο μάζας K. Έτσι θα έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=0 \rightarrow \alpha_{cmx}=0$ (1)

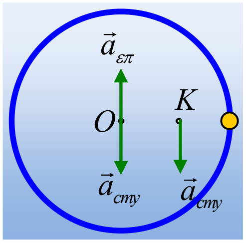
$\Sigma F_y=m\alpha_{cmy} \rightarrow 2mg\text{-}N=2m\alpha_{cmy}$ (2)

Περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau_K = I_K\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$$\text{Όπου } I_K=\left(mR^2+m\frac{R^2}{4}\right)+m\frac{R^2}{4}=\frac{3}{2}mR^2 \rightarrow$$

$$N\cdot\frac{R}{2}=\frac{3mR^2}{2}\cdot a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow$$

$$N=3mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$



Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες επιταχύνσεις του άξονα O, όπου $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot$ (OK) = $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r=$ $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot$ ½ R, ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνσή του, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας K, $\alpha_\kappa=\omega^2\cdot$ ½ R=0. Αλλά όμως το σημείο O δε θα επιταχυνθεί ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω οπότε:

$$\alpha_{cmy}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot \tfrac{1}{2} R \quad (4)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$2mg\text{-}3mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=m\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{g}{2R}=\frac{10}{2}rad/s^2=5rad/s^2.$$

ii) Αν δουλεύαμε το ίδιο πρόβλημα με βάση το σημείο Ο του άξονα;

Θεωρούμε έναν παρατηρητή στο Ο. Αυτός δεν έχει επιτάχυνση, αφού το στερεό δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση ούτε πρόκειται να κινηθεί κατακόρυφα. Συνεπώς δεν «βλέπει» καμιά αδρανειακή δύναμη οπότε γράφει:

$$L_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to$$

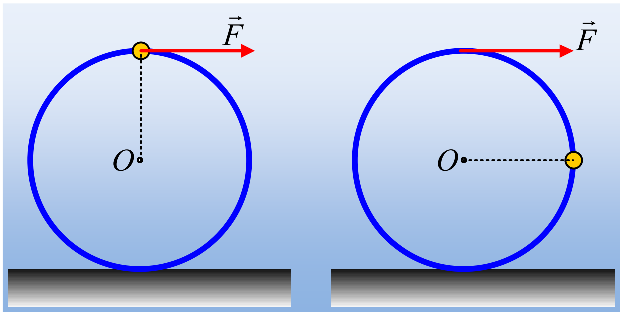
$$\frac{dL_o}{dt} = I_o \frac{d\omega}{dt} = \Sigma\tau \to$$

$$(mR^2 + mR^2) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = mgR \to$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{g}{2R} = \frac{10}{2} rad/s^2 = 5 rad/s^2.$$

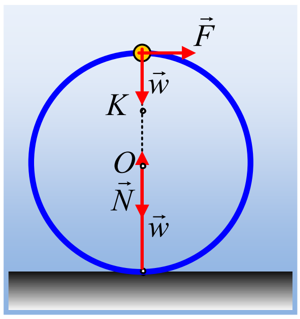
Προφανώς πιο εύκολη λύση από την προηγούμενη, η οποία όμως στην ουσία είναι σωστή επειδή η επιτάχυνση του Ο είναι μηδενική.

2) Γύρω από το παραπάνω στερεό τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Αφήνουμε το στερεό σε λείο οριζόντιο επίπεδο και ασκούμε μέσω του νήματος οριζόντια δύναμη F=6N. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού στις δυο θέσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, καθώς και η επιτάχυνση του κέντρου Ο της στεφάνης, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F. Δίνεται m=1kg και $g=10m/s^2$.



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό. Για να βρούμε τη γωνιακή επιτάχυνση, μπορούμε να δουλέψουμε:

Α) Ως προς κέντρο μάζας Κ:

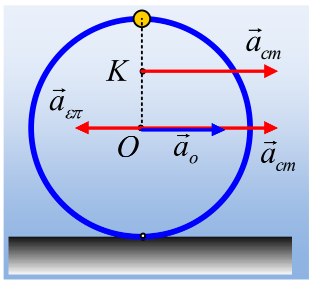


$$\Sigma\tau_K = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to$$

$$F \cdot \frac{R}{2} = \frac{3}{2} mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \to$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F}{3mR} = \frac{6}{3 \cdot 1 \cdot 1} rad/s^2 = 2 rad/s^2.$$

Εξάλλου: $\Sigma F_x = 2m \cdot \alpha_{cm} \to a_{cm} = \frac{6}{2} m/s^2 = 3 m/s^2$.

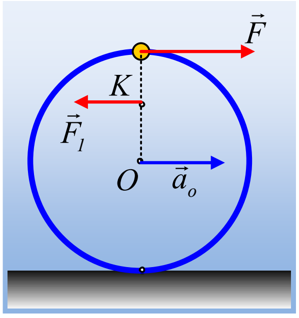


Αλλά τότε η επιτάχυνση του κέντρου Ο του δακτυλίου είναι:

$$\alpha_O = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r = (3 - 2 \cdot 0{,}5) m/s^2 = 2\ m/s^2.$$

Ας σημειωθεί ότι ω=0 οπότε δεν έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση για την κυκλική κίνηση του Ο γύρω από το κέντρο μάζας Κ.

Β) Ας δουλέψουμε τώρα με βάση το κέντρο Ο του δακτυλίου. Τότε ένας παρατηρητής στο Ο «βλέπει» να ασκείται στο κέντρο μάζας Κ η αδρανειακή δύναμη μέτρου $F_1=2m\cdot\alpha_o=2m\cdot(\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R/2)$ και γράφει:



$$\Sigma\tau_o=FR-F_1\frac{R}{2}=I_o a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow$$

$$2mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}=FR-2m\left(a_{cm}-a_{\gamma\omega\nu}\frac{R}{2}\right)\frac{R}{2}\rightarrow$$

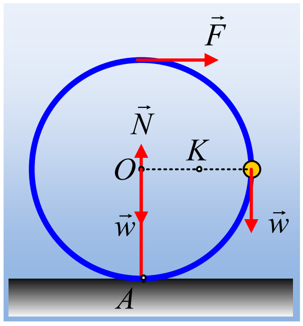
$$2mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}=FR-2ma_{cm}\frac{R}{2}+2ma_{\gamma\omega\nu}\frac{R^2}{4}$$

$$\frac{3}{2}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}=FR-F\frac{R}{2}\rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{F}{3mR}=\frac{6}{3\cdot 1\cdot 1}rad/s^2=2rad/s^2.$$

Οπότε και πάλι $\alpha_O=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r=(3-2\cdot 0,5)m/s^2=2\ m/s^2$.

ii) Ερχόμαστε τώρα στο διπλανό σχήμα.



Α) Για το κέντρο μάζας Κ θα έχουμε:

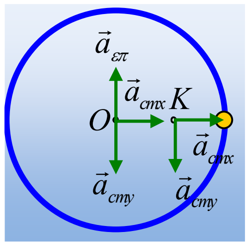
Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\alpha_{cmx}\rightarrow F=2m\ \alpha_{cmx}$ (1)

$\Sigma F_y=m\alpha_{cmy}\rightarrow 2mg-N=2m\alpha_{cmy}$ (2)

Περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau_K=I_K\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$$N\cdot\frac{R}{2}+FR=\frac{3mR^2}{2}\cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

$N+2F=3mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)



Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες επιταχύνσεις του άξονα Ο, όπου $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot$ (ΟΚ) = $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r=\ \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ ½\ R$, ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνσή του, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας Κ, $\alpha_\kappa=\omega^2\cdot ½\ R=0$. Αλλά όμως το Ο δε θα επιταχυνθεί ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω οπότε:

$\alpha_{cmy}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot ½\ R$ (4)

Με πρόσθεση των (2) και (3) παίρνουμε:

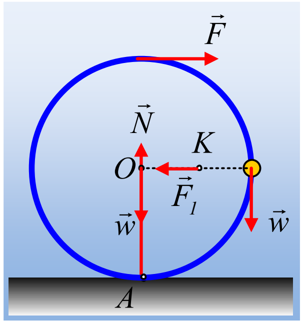
$$2mg+2F=8mg\alpha_{cmy}\rightarrow$$

$$a_{cmy}=\frac{mg+F}{4m}=\frac{10+6}{4\cdot 1}m/s^2=4m/s^2.$$

Και έτσι από την (4) $a_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{2a_{cmy}}{R}=8rad/s^2$

Ενώ για την επιτάχυνση του κέντρου Ο έχουμε:

$$a_o = a_{cmx} = \frac{F}{2m} = 3m/s^2.$$



Β) Ας δουλέψουμε τώρα με βάση το κέντρο Ο του δακτυλίου. Τότε ένας παρατηρητής στο Ο «βλέπει» να ασκείται στο κέντρο μάζας Κ η αδρανειακή δύναμη μέτρου $F_1=2m\cdot\alpha_o=2m\cdot\alpha_{cmx}$ η οποία όμως δεν έχει ροπή ως προς το Ο και γράφει:

$$\Sigma\tau_o = FR + mgR = I_o a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$2mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = FR + mgR \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F+mg}{2mR} = \frac{6+10}{2\cdot 1\cdot 1} rad/s^2 = 8rad/s^2.$$

Ενώ για την επιτάχυνση του κέντρου Ο έχουμε:

$$a_o = a_{cmx} = \frac{F}{2m} = 3m/s^2.$$

Συμπέρασμα:

Το μόνο συμπέρασμα που θα ήθελα να βγει μετά από όλα τα παραπάνω είναι το εξής:

Ας αφήσουμε στην άκρη «περίεργα θέματα» εφαρμογής του $2^{ου}$ νόμου και ας επιμείνουμε σε αυτό που γράφει το σχολικό και στο οποίο θα εξετασθούν τα παιδιά. Αυτό δεν είναι τίποτα άλλο, παρά ότι κάθε σύνθετη κίνηση αναλύεται σε μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Αλλά και ας περιοριστούμε επίσης σε συμμετρικά στερεά που να μην παρουσιάζει κανένα πρόβλημα η εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου με τη μορφή $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$. Κάθε άλλο θέμα είναι αφενός δύσκολο και χωρίς καμιά δυνατότητα αντιμετώπισής τους από μαθητές, αφετέρου μόνο από σύμπτωση, μπορεί κάποιο πρόβλημα να επιλύεται, όπως το τελευταίο όπου απλά επειδή η επιτάχυνση του Ο κατευθύνεται προς το κέντρο μάζας, δίνει «εύκολη λύση».

dmargaris@gmail.com