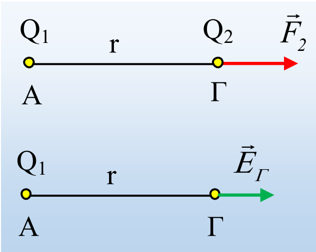
Ο νόμος Biot-Savart και εφαρμογές του

Ας ακολουθήσουμε μια πορεία αναλογίας για να καταλήξουμε στον γνωστό νόμο Biot-Savart ξεκινώντας από τον γνωστό μας νόμο Coulomb. Τι ακριβώς μας λέει ο νόμος αυτός;



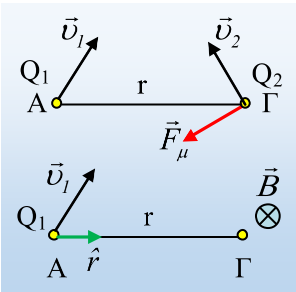
Αν στα σημεία Α και Γ έχουμε δύο ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία Q_1 και Q_2, έστω θετικά. Τότε το φορτίο Q_2 απωθείται με δύναμη μέτρου:

$$F_2 = k_c \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Ένας νόμος αντιστρόφου τετραγώνου.

Για να ερμηνεύσουμε την άσκηση της δύναμης αυτής, δεχόμαστε ότι το φορτίο Q_1 δημιουργεί γύρω του στο χώρο ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, όπου στο σημείο Γ η έντασή του (κάτω σχήμα), έχει μέτρο:

$$E_\Gamma = \frac{F}{Q_2} = k_c \frac{Q_1}{r^2}$$



Αν τώρα τα δυο παραπάνω φορτία, δεν είναι ακίνητα, αλλά κινούνται στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα, τότε το φορτίο Q_2 δέχεται **μαγνητική** δύναμη:

$$\vec{F}_\mu = k_\mu \frac{Q_2\vec{\upsilon}_2 \times (Q_1\vec{\upsilon}_1 \times \hat{r})}{r^2}$$

Όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση ΑΓ.

Αξίζει να σταθούμε για λίγο, σε δύο πράγματα:

- Τα παραπάνω εξωτερικά γινόμενα:

  Το γινόμενο $\vec{\gamma} = Q_1\vec{\upsilon}_1 \times \hat{r}$

  Είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, οπότε το γινόμενο:

  $$Q_2\vec{\upsilon}_2 \times (Q_1\vec{\upsilon}_1 \times \hat{r})$$

  Δίνει ένα διάνυσμα, στο επίπεδο της σελίδας, κάθετο στην διεύθυνση της ταχύτητας υ_2, όπως έχει σχεδιαστεί στο πάνω σχήμα η μαγνητική δύναμη $\vec{F}_\mu$.

- Και η δύναμη αυτή, είναι δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου, όπως και η δύναμη Coulomb. Απλά τώρα πηγές και υποθέματα είναι τα κινούμενα φορτία $(Q_1\vec{\upsilon}_1)$ και $(Q_2\vec{\upsilon}_2)$ ενώ η σταθερά k_c, αντικαταστάθηκε από την γνωστή μας k_μ.

Για να ερμηνεύσουμε την άσκηση της δύναμης αυτής, δεχόμαστε ότι το φορτίο Q_1 δημιουργεί γύρω του στο χώρο ένα μαγνητικό, όπου στο σημείο Γ η έντασή του (κάτω σχήμα), είναι ίση:

$$\vec{B} = k_\mu \frac{Q_1\vec{\upsilon}_1 \times \hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

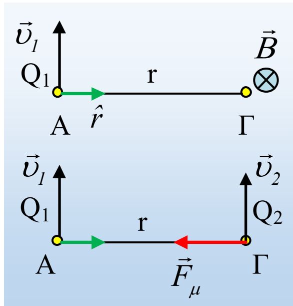
Με κατεύθυνση, που προκύπτει από τον κανόνα των τριών δακτύλων, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα.

Αλλά τότε στο φορτίο Q_2 ασκείται από το μαγνητικό πεδίο, δύναμη Lorenz με τιμή:

$$\vec{F}_\mu = Q_2\vec{\upsilon}_2 \times \vec{B}$$

Ή αν προτιμάτε η γνωστή μας δύναμη μέτρου F_L=Bυq…

Εφαρμογή 1η :



Έστω ότι τα παραπάνω θετικά σημεία φορτία κινούνται παράλληλα, όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η ασκούμενη δύναμη στο φορτίο Q_2.

Εξαιτίας της ταχύτητας του φορτίου Q_1, στο σημείο Γ, δημιουργείται μαγνητικό πεδίο με ένταση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα, με τιμή:

$$\vec{B} = k_\mu \frac{Q_1\vec{\upsilon}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

Ή αν προτιμάτε, ένταση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με μέτρο:

$$B = k_\mu \frac{Q_1\upsilon_1}{r^2}$$

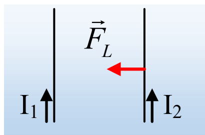
Αλλά τότε στο κινούμενο φορτίο Q_2 ασκείται δύναμη:

$$\vec{F}_\mu = Q_2\vec{\upsilon}_2 \times \vec{B}$$

Με κατεύθυνση όπως στο κάτω σχήμα.

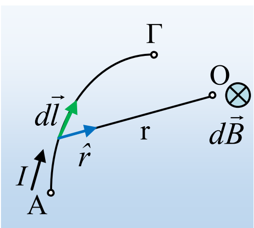
Αν μας ενοχλούν τα εξωτερικά γινόμενα, το Q_2 δέχεται δύναμη Lorentz, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων και μέτρο:

$$F_\mu = Q_2\upsilon_2 B = Q_2\upsilon_2 \cdot k_\mu \frac{Q_1\upsilon_1}{r^2} = k_\mu \frac{Q_1\upsilon_1 \cdot Q_2\upsilon_2}{r^2}$$



Αξίζει να αναρωτηθούμε τι βρήκαμε! Θυμάστε τους δύο παράλληλους ρευματοφόρους αγωγούς, που έλκονται; Τα δύο κινούμενα φορτία ισοδυναμούν με δυο τέτοιους ρευματοφόρους αγωγούς!!!

Ας περάσουμε τώρα από το σημειακό φορτίο στο (γραμμικό) ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει έναν αγωγό, ΑΓ, όπως στο σχήμα.



Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ του αγωγού ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης Ι. Τότε αν θεωρήσουμε ότι τα φορτία κινούνται με σταθερή ταχύτητα υ (ταχύτητα ολισθήσεως), τότε ένα φορτίο θα χρειαστεί χρονικό διάστημα dt για να διατρέξει το dl, όπου dl=υ·dt, οπότε από την διατομή του σύρματος στο τέλος του dl θα περάσει φορτίο dq, όπου:

$$dq \cdot \vec{\upsilon} = dq \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = Id\vec{l}$$

Αλλά τότε το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού $d\vec{l}$ δημιουργεί στο τυχαίο σημείο Ο, σε απόσταση r, ένα μαγνητικό πεδίο, ίδιο με αυτό που θα δημιουργούσε το κινούμενο φορτίο dq·υ, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$d\vec{B} = k_\mu \frac{Q_1\vec{\upsilon}_1 \times \hat{r}}{r^2} = k_\mu \frac{dq\vec{\upsilon} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow$$

$$\boxed{d\vec{B} = k_\mu I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}} \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) αποτελεί τον νόμο των Biot-Savart ο οποίος μας επιτρέπει να βρίσκουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ του ρευματοφόρου αγωγού σε σημείο Ο του χώρου.

Σχόλια:

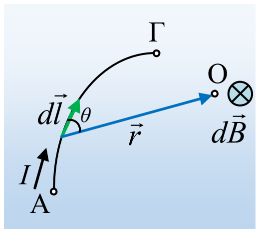
1) Πολλές φορές η εξίσωση (2) γράφεται με την μορφή:

$$d\vec{B} = k_\mu I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2^\alpha)$$

Η οποία δεν χρησιμοποιεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$, αλλά το διάνυσμα $\vec{r}$ για την απόσταση του σημείου Ο από το τμήμα $d\vec{l}$.

Νομίζω ότι καλύτερα να μείνουμε στη μορφή της εξίσωσης (2) τονίζοντας το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου.

2) Αναλύοντας το εξωτερικό γινόμενο, χρησιμοποιώντας την γωνία θ, μεταξύ των διανυσμάτων και τον γνωστό κανόνα των τριών δακτύλων (ο αντίχειρας τη φορά του ρεύματος, ο δείκτης την απόσταση $\vec{r}$, τότε ο μέσος μας δίνει την κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου $d\vec{B}$), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (2), για το μέτρο της έντασης:



$$\boxed{dB = k_\mu I \frac{dl \cdot r \cdot \eta\mu\theta}{r^3} = k_\mu \frac{I\,dl \cdot \eta\mu\theta}{r^2}} \quad (2\beta)$$

Μορφή την οποία συναντάμε συνήθως σε βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

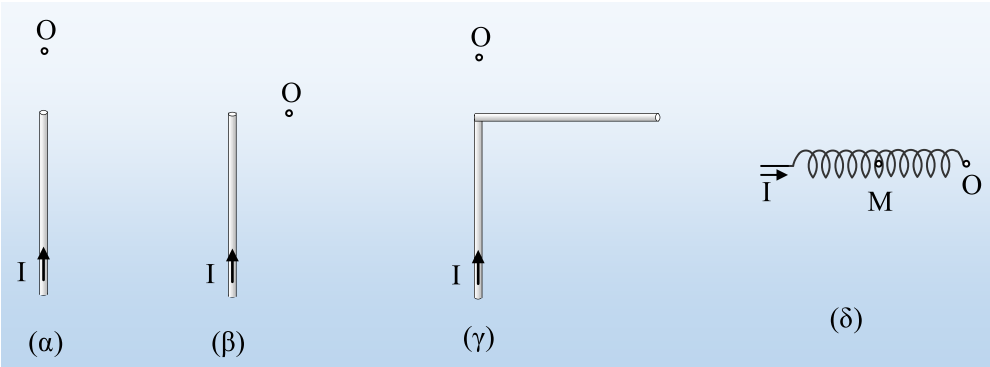
3) Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Ο, που δημιουργεί το τμήμα ΑΓ του αγωγού, δεν έχουμε παρά να πάρουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, κατά μήκος της καμπύλης ΑΓ:

$$\vec{B}_{A\Gamma} = \int_{A\Gamma} d\vec{B} = k_\mu I \int_{A\Gamma} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (2\gamma)$$

Πριν προχωρήσουμε σε κάποιους υπολογισμούς, ας δούμε κάποια άμεσα συμπεράσματα:

Εφαρμογή 2η :

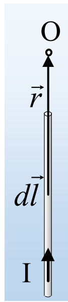
Δίνονται οι αγωγοί στα παρακάτω σχήματα:



Πόση είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου στα σημεία Ο;

Απάντηση:

i) Στο (α) σχήμα αν πάρουμε οποιοδήποτε τυχαίο στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ του αγωγού, δημιουργεί στο σημείο Ο μαγνητικό πεδίο μέτρου:

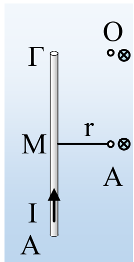


$$dB = k_\mu \frac{I dl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} = k_\mu \frac{I dl \cdot \eta\mu 0^o}{r^2} = 0$$

Αφού η γωνία μεταξύ του διανύσματος $d\vec{l}$ και του $\vec{r}$ είναι θ=0°.

Αλλά τότε στην προέκταση ενός ευθύγραμμου αγωγού, η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδενική.

ii) Όταν έχουμε έναν ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους, γνωρίζουμε ότι η ένταση του πεδίου σε σημείο Α, σε απόσταση r έχει μέτρο



$$B_A = k_\mu \frac{2I}{r}$$

Η τιμή αυτή προκύπτει με εφαρμογή του νόμου B-S από το άκρο Α, μέχρι το άκρο Γ του αγωγού. Αλλά λόγω συμμετρίας τα τμήματα ΑΜ (στην πραγματικότητα από το -∞ στο Μ) και ΜΓ (από το Μ στο +∞) δημιουργούν μαγνητικά πεδία με ίσες εντάσεις στο Α. Οπότε για το σημείο Γ, στο άκρο του αγωγού η ένταση θα είναι ίση με το μισό της παραπάνω έντασης:

$$B_O = \frac{1}{2} k_\mu \frac{2I}{r}$$

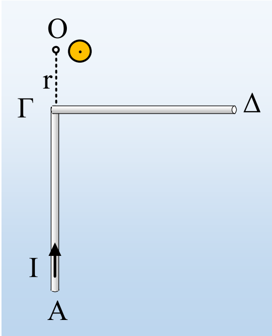
Ας το πούμε αλλιώς:

$$B_A = k_\mu I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} = k_\mu I \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} \right] \rightarrow$$

$$B_A = 2k_\mu I \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} \right] \rightarrow$$

$$B_A = 2B_O \rightarrow B_O = \frac{1}{2} B_A = \frac{1}{2} k_\mu \frac{2I}{r}$$

iii) Με βάση τα προηγούμενα ο αγωγός ΑΓ δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο. Αντίθετα ο αγωγός ΓΔ, δημιουργεί πεδίο με ένταση, κάθετη στο επίπεδο και φορά προς τα έξω με μέτρο:



$$B_O = \frac{1}{2} k_\mu \frac{2I}{r}$$

iv) Αλλά και στο σωληνοειδές θα «μπορούσαμε» να εφαρμόσουμε τον νόμο B-S για να υπολογίσουμε την ένταση του πεδίου στο μέσον του Μ,

$$B_M = k_\mu I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} = k_\mu I \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} \right] \rightarrow$$

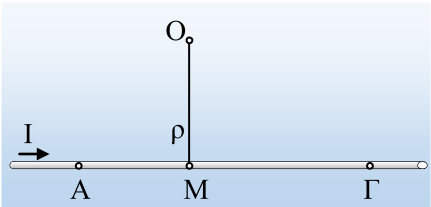
$$B_M = 2k_\mu I \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{Idl \cdot \eta\mu\theta}{r^2} \right] \rightarrow$$

$$B_M = 2B_O \rightarrow B_O = \frac{1}{2} B_M = \frac{1}{2} k_\mu 4\pi I \frac{N}{\ell}$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα το νόμο σε κάποιες περιπτώσεις:

Εφαρμογή 3η :

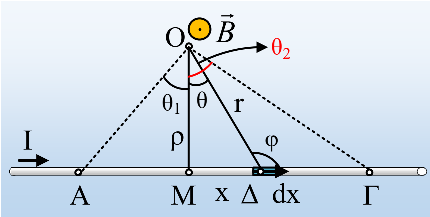
Έστω ένας ευθύγραμμος αγωγός, μεγάλου μήκους, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι και ένα σημείο Ο το οποίο απέχει κατά (ΟΜ)=ρ από τον αγωγό. Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου στο σημείο Ο, η οποία οφείλεται στο τμήμα ΑΓ του αγωγού.



Απάντηση:

Το σημείο Ο και ο αγωγός ορίζουν ένα επίπεδο, έστω το επίπεδο της σελίδας.

Χωρίζουμε τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα dx, ένα εκ των οποίων φαίνεται στο διπλανό σχήμα, το οποίο απέχει κατά r από το Ο. Με βάση τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία βρίσκουμε ότι η ένταση στο Ο, είναι κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τα έξω, για κάθε τέτοιο τμήμα, άρα και η ολική ένταση έχει την ίδια κατεύθυνση.



Θεωρώντας το Μ ως την αρχή ενός άξονα x με τα θετικά προς τα δεξιά, τότε το dx απέχει κατά x από το Μ και τότε εφαρμόζοντας το νόμο B-S με τη μορφή της εξίσωσης (2β) θα έχουμε:

$$dB = k_\mu \frac{I\,dx \cdot \eta\mu\varphi}{r^2} \rightarrow$$

$$B_o = k_\mu I \int_A^\Gamma \frac{dx \cdot \eta\mu\varphi}{r^2} \xrightarrow{\eta\mu(90^o+\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta} B_o = k_\mu I \int_A^\Gamma \frac{dx \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{r^2}$$

Εξάλλου από το τρίγωνο ΟΜΔ έχουμε:

$$x = \rho \cdot \varepsilon\varphi\theta \rightarrow dx = \rho \cdot (\varepsilon\varphi\theta)'\, d\theta = \rho \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} d\theta$$

Και με αντικατάσταση έχουμε:

$$B_o = k_\mu I \int_A^\Gamma \frac{dx \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{r^2} = k_\mu I \int_A^\Gamma \frac{\rho d\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\rho^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} = k_\mu I \frac{1}{\rho} \int_A^\Gamma \sigma\upsilon\nu\theta d\theta \rightarrow$$

$$B_o = k_\mu I \frac{1}{\rho} [\eta\mu\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$B_o = k_\mu \frac{I}{\rho}(\eta\mu\theta_2 - \eta\mu\theta_1) \quad (3)$$

Ας σημειωθεί ότι στην τελική σχέση, η γωνία θ_2 θεωρείται θετική, ενώ η θ_1 αρνητική, ενώ ρ είναι η ακτίνα της κυκλικής δυναμικής γραμμής, γύρω από τον αγωγό, την οποία στην καθημερινή πράξη, συμβολίζουμε ως r.

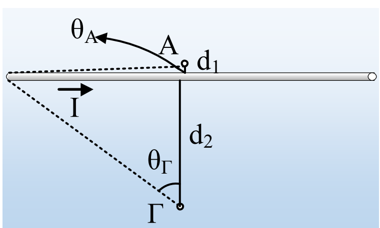
Συμπεράσματα:

1) Και αν θέλαμε την ένταση στο Ο όχι για τμήμα ΑΓ του παραπάνω αγωγού, αλλά για όλον τον αγωγό, που θεωρούμε ότι είναι απείρου μήκους; Τότε η γωνία θ_1=- π/2, ενώ θ_2=π/2 και με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση ρ από αγωγό απείρου μήκους:

$$B_o = k_\mu \frac{I}{\rho}(\eta\mu\theta_2 - \eta\mu\theta_1) = k_\mu \frac{I}{\rho}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = k_\mu \frac{I}{\rho}(1+1) \rightarrow$$

$$B_o = k_\mu \frac{2I}{\rho}$$

2) Αλλά τι σημαίνει «αγωγός απείρου μήκους»; Προφανώς τέτοιος αγωγός δεν υπάρχει. Ας πάρουμε λοιπόν έναν ευθύγραμμο αγωγό μήκους l=1m και ας υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, σε δύο σημεία, κοντά στο μέσον του. Το ένα απέχει κατά d_1=2cm από τον αγωγό, το άλλο d_2=40cm, όπως στο σχήμα.



Για το σημείο Α έχουμε

$$\varepsilon\varphi\theta_A=\frac{\ell/2}{d_1}=\frac{50cm}{2cm}=25\rightarrow\eta\mu\theta_A=0,99\xrightarrow{(3)}$$

$$B_A=k_\mu\frac{I}{\rho}\left(\eta\mu\theta_2-\eta\mu\theta_1\right)=k_\mu\frac{I}{\rho}(0,99+0,99)=k_\mu\frac{1,98I}{\rho}\approx k_\mu\frac{2I}{\rho}$$

Για το σημείο Γ:

$$\varepsilon\varphi\theta_\Gamma=\frac{\ell/2}{d_2}=\frac{50cm}{40cm}=1,25\rightarrow\eta\mu\theta_A=0,78\xrightarrow{(3)}$$

$$B_\Gamma=k_\mu\frac{I}{\rho}\left(\eta\mu\theta_2-\eta\mu\theta_1\right)=k_\mu\frac{I}{\rho}(0,78+0,78)=k_\mu\frac{1,56I}{\rho}$$

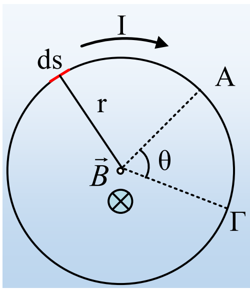
Τι μας δείχνουν τα παραπάνω αποτελέσματα; Το μαγνητικό πεδίο στο Α, είναι ίδιο με το μαγνητικό πεδίο που θα δημιουργούσε ένας αγωγός απείρου μήκους. Ένα μερμήγκι στο Α βλέπει μπροστά του ένα άπειρο σύρμα…

Αντίθετα η ένταση του πεδίου στο Γ, είναι σαφώς μικρότερη παρουσιάζοντας μια μείωση 22% σε σχέση με την τιμή που είχαμε, αν ο αγωγός ήταν απείρου μήκους.

Εφαρμογή 4η :

Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο ενός κυκλικού αγωγού, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα. Ποια η ένταση που οφείλεται σε ένα τμήμα ΑΓ του αγωγού, το οποίο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ=60°;

Απάντηση:



Προφανώς το θέμα είναι γνωστόν… Ας κάνουμε λοιπόν την απόδειξη, θεωρώντας τον κυκλικό αγωγό στο επίπεδο της σελίδας. Κάθε στοιχειώδες τόξο του αγωγού, δημιουργεί στο κέντρο του κύκλου μαγνητικό πεδίο με ένταση κάθετη στο επίπεδο και φορά προς τα μέσα, μέτρου:

$$dB=k_\mu\frac{Ids\cdot\eta\mu90^o}{r^2}=k_\mu\frac{Ids}{r^2}$$

Οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε για όλον τον κύκλο:

$$B=\int_c d\vec{B}=k_\mu I\int_c\frac{ds}{r^2}=k_\mu\frac{I}{r^2}\int_c ds=k_\mu\frac{I}{r^2}\cdot2\pi r=k_\mu\frac{2\pi I}{r}$$

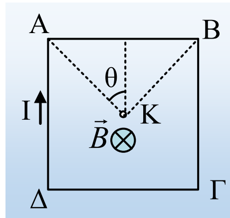
Αν περιοριστούμε στο τμήμα ΑΓ, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$B_{A\Gamma}=\int_{A\Gamma}dB=k_\mu I\int_{A\Gamma}\frac{ds}{r^2}=k_\mu\frac{I}{r^2}\int_{A\Gamma}ds=k_\mu\frac{I}{r^2}\cdot\theta r=k_\mu\frac{I}{r}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{6}k_\mu\frac{2\pi I}{r}$$

Εφαρμογή 5η :

Στο επίπεδο της σελίδας έχουμε ένα αγώγιμο τετράγωνο πλευράς 2α=20cm, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι. Να υπολογιστεί η ένταση στο κέντρο Κ του τετραγώνου.

Απάντηση:

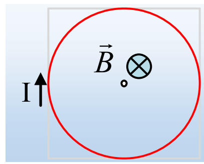


Με βάση τον δεξιόστροφο κοχλία βρίσκουμε ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα του πλαισίου δημιουργεί στο κέντρο Κ, μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο του τετραγώνου, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα. Εξάλλου από την Γεωμετρία προκύπτει θ=45°. Αλλά τότε κάθε πλευρά του τετραγώνου, με βάση την εξίσωση (3) δημιουργεί στο κέντρο Κ ένταση μέτρου:

$$B_{AB} = k_\mu \frac{I}{\rho}\left(\eta\mu\theta_2 - \eta\mu\theta_1\right) = k_\mu \frac{I}{\alpha}\left(\eta\mu 45^o - \eta\mu(-45^o)\right) = k_\mu \frac{2I}{\alpha}\eta\mu 45^o \rightarrow$$

$$B_K = 4B_{AB} = k_\mu \frac{8I}{\alpha}\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$B_K = k_\mu \frac{5,66\,I}{\alpha}$$



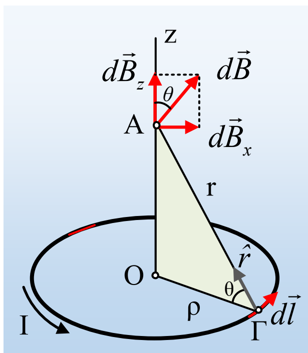
Αξίζει να συγκριθεί η παραπάνω τιμή, με την ένταση ενός κυκλικού αγωγού εγγεγραμμένου στο παραπάνω τετράγωνο με ακτίνα r=α. Η ένταση στο κέντρο του θα ήταν:

$$B = k_\mu \frac{2\pi I}{r} = k_\mu \frac{6,28I}{r} > B_{\tau\varepsilon\tau\rho}$$

Εφαρμογή 6η :

Τι συμβαίνει με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο του κυκλικού αγωγού; Να βρεθεί η ένταση του πεδίου στο σημείο Α, πάνω στην κάθετη στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού, στο κέντρο του, σε απόσταση (ΟΑ)=α, όταν ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι.

Απάντηση.



Αν πάρουμε ένα στοιχειώδες τόξο $d\vec{l}$, αυτό δημιουργεί στο σημείο Α, στοιχειώδη ένταση μαγνητικού πεδίου $d\vec{B}$, η οποία με βάση τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το $d\vec{l}$ και το διάνυσμα $\vec{r}$, διανύσματα κάθετα μεταξύ τους (θεώρημα τριών καθέτων). Αλλά τότε το διάνυσμα $d\vec{B}$ βρίσκεται στο επίπεδο του γκρι τριγώνου ΟΑΓ και είναι κάθετη στην πλευρά του ΑΓ. Έτσι αναλύοντας την ένταση $d\vec{B}$ σε δύο συνιστώσες, η οριζόντια συνιστώσα εξουδετερώνεται από την αντίστοιχη οριζόντια συνιστώσα του αντιδιαμετρικού τόξου του $d\vec{l}$ και έτσι απομένουν μόνο οι κατακόρυφες συνιστώσες οι οποίες σχηματίζουν γωνία θ με την κατακόρυφη, ίση με την γωνία ΟΓΑ. Με βάση όλα αυτά, θα έχουμε, ξεκινώντας από την εξίσωση (2β) για το μέτρο της έντασης:

$$dB = k_\mu I \frac{dl \cdot r \cdot \eta\mu 90^o}{r^3} = k_\mu \frac{I\,dl}{r^2} \rightarrow$$

$$dB_z = dB \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = k_\mu \frac{I\,dl}{r^2} \cdot \frac{\rho}{r} = k_\mu \frac{\rho I}{r^3} \cdot dl = k_\mu \frac{\rho I}{\left(\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}\right)^3} \cdot dl \rightarrow$$

$$B_z = \oint k_\mu \frac{\rho I}{\left(\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}\right)^3} \cdot dl = k_\mu \frac{\rho I}{\left(\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}\right)^3} \cdot \oint dl = k_\mu \frac{\rho I}{\left(\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}\right)^3} \cdot 2\pi\rho$$

$$\boxed{B_z = 2\pi k_\mu I \frac{\rho^2}{\left(\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}\right)^3}}$$

Αντικαθιστώντας α=0, βρίσκουμε ξανά το μέτρο της έντασης του κυκλικού αγωγού:

$$B_z = 2\pi k_\mu I \frac{\rho^2}{\left(\sqrt{\rho^2 + \alpha^2}\right)^3} = 2\pi k_\mu I \frac{\rho^2}{\rho^3} = k_\mu \frac{2\pi I}{\rho}$$

Πηγές:

[Φυσική Β΄ Λυκείου, ομάδας Δρη.]

[Open e-class ΕΚΠΑ]

[Openpress]

dmargaris@gmail.com