Μήπως ήρθε η ώρα να συμφωνήσουμε;

Κάθε σύνθετη κίνηση στερεού (κίνηση που δεν μπορεί να μελετηθεί ως μεταφορική ή ως στροφική), έχουμε **το δικαίωμα** να την θεωρήσουμε ότι αποτελείται από επιμέρους απλές κινήσεις.

Σε προηγούμενες ενασχολήσεις με το θέμα, τόσο στην ανάρτηση «**και όμως ισχύει**», όσο και στην «**Μια σύνθετη κίνηση και οι επιμέρους κινήσεις…**» η σύνθετη κίνηση μελετήθηκε ως επαλληλία δύο στροφικών κινήσεων με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2, η σύνθεση των οποίων οδηγεί στην μία και μοναδική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου.

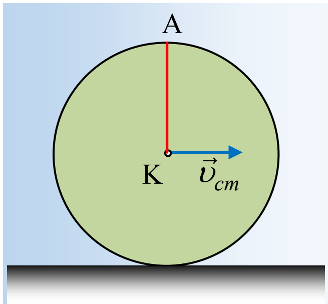
Σήμερα θα ακολουθήσουμε διαφορετική οδό. Πιο «λυκειακή», πιο κοντά σε αυτό που διδάσκουμε στα σχολεία. Η σύνθετη κίνηση θα μελετηθεί **αυστηρά** ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής γύρω από νοητό άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του δίσκου.

Αλλά ας τονισθεί από την αρχή ότι, δεν θα παίξουμε με το τι βλέπει ο ένας ή ο άλλος παρατηρητής, αλλά τι βλέπει και πώς μελετά την κίνηση ο **ακίνητος αδρανειακός παρατηρητής**.

Ας ξεκινήσουμε από τα …γνωστά:

Παράδειγμα 1ο :

Ένας ομογενής δίσκος ακτίνας r=0,5m κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου Κ, υ_{cm}=2m/s.



i) Ποια η γωνιακή του ταχύτητα.

ii) Κατά ποια γωνία στρέφεται σε χρόνο t_1=(π/4)s η ακτίνα ΚΑ, που έχει σημειωθεί στο σχήμα;

iii) Πώς συνδέεται η απόσταση που διανύει στο παραπάνω χρονικό διάστημα το κέντρο (εδώ και κέντρο μάζας) Κ, με τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου;

Απάντηση:

i) Με βάση τη γνωστή σχέση $\upsilon_{cm}=\omega\cdot r$, βρίσκουμε ω=4rad/s.

ii) Η γωνία στροφής της ακτίνας ΚΑ, ίση με τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου, είναι ίση:

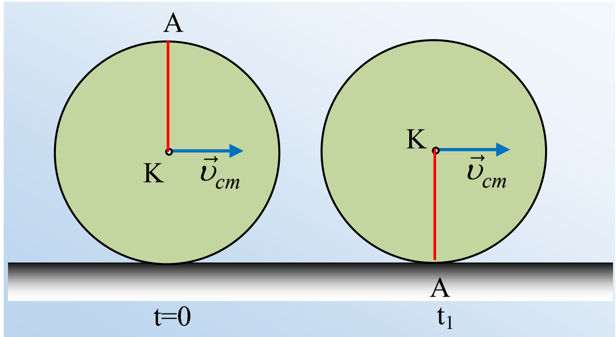
$$\Delta\varphi=\omega\cdot t_1=4\cdot\frac{\pi}{4}rad=\pi\ \ rad$$

Με βάση την παραπάνω τιμή, καταλαβαίνουμε ότι ο δίσκος έχει περιστραφεί κατά:

$$N=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=0,5$$, έκανε δηλαδή μισή στροφή.

iii) Το κέντρο Κ διένυσε απόσταση (μετατόπιση ίση με το διάστημα) κατά:

$$\Delta s_K=\upsilon_{cm}t_1=2\cdot\frac{\pi}{4}m=\frac{\pi}{2}\ \ m$$

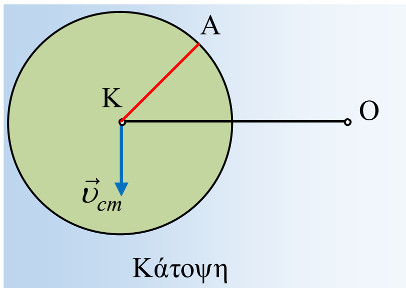


Οπότε αφού κατά την κύλιση ισχύει $\Delta s_K=\Delta s$, όπου Δs το μήκος του τόξου που ήρθε σε επαφή με το έδαφος και ο αριθμός των περιστροφών μπορεί να υπολογιστεί και από το λόγο:

$$N=\frac{\Delta s}{2\pi r}=\frac{\Delta x}{2\pi r}=\frac{\pi/2}{2\pi\cdot 0,5}=0,5$$

Παράδειγμα 2ο :

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος ακτίνας r=0,5m, δεμένος στο ένα άκρο νήματος μήκους l=1m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο Ο. Το νήμα δένεται κατάλληλα στο κέντρο Κ του δίσκου, επιτρέποντάς του την περιστροφή. Σε μια στιγμή $t_0=0$, μετά από κατάλληλο κτύπημα, ο δίσκος αποκτά ταχύτητα κέντρου Κ ίση με $\upsilon_{cm}=2m/s$, κάθετη στην ΟΚ με αποτέλεσμα να κινηθεί.



i) Η κίνηση είναι μεταφορική ή όχι;

ii) Κατά ποια γωνία θα περιστραφεί η ακτίνα ΚΑ, η οποία επισημανθεί με κόκκινο χρώμα, μέχρι τη στιγμή $t_1=(\pi/4)s$;

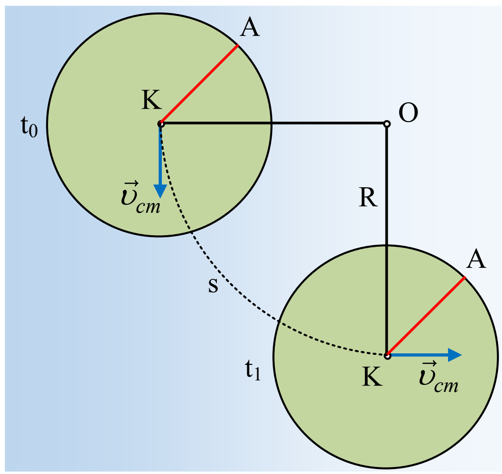
Απάντηση:

i) Στον δίσκο δεν ασκείται καμιά ροπή οπότε δεν πρόκειται να αποκτήσει καμιά γωνιακή επιτάχυνση. Απλά θα κινηθεί **ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΑ** σαν υλικό σημείο, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση.

ii) Μέχρι τη στιγμή t_1 το κέντρο Κ θα διαγράψει τόξο μήκους:

$$s=\upsilon_{cm}\cdot t_1=(\pi/2)\ m = \tfrac{1}{4}\cdot 2\pi\ \ell,$$

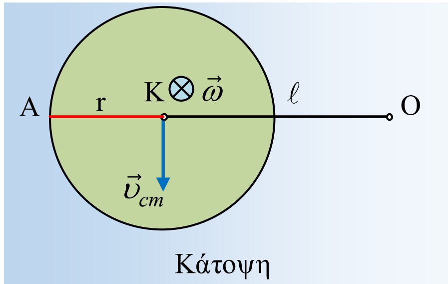
ίσο δηλαδή με το ¼ της περιφέρειας κύκλου ακτίνας ℓ=1m, πάνω στο οποίο κινείται, έχοντας φτάσει τη στιγμή t_1 στη θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα. Όσον αφορά δηλαδή την κυκλική κίνηση του κέντρου Κ, κάποιος μπορεί να πει ότι έχει κάνει ¼ της κυκλικής τροχιάς και το χρονικό διάστημα t_1 είναι ίσο με το ¼ της περιόδου της κυκλικής κίνησης. Σε όλα αυτά σύμφωνοι, αλλά **περιστροφή του στερεού που ονομάζεται δίσκος, δεν υπάρχει.**



Ο προσανατολισμός του δεν άλλαξε και η ακτίνα ΟΑ δεν έχει στραφεί καθόλου, βλέπε σχήμα.

Παράδειγμα 3ο :

Ο παραπάνω δίσκος αντί να ηρεμεί, όπως προηγούμενα, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=4rad/s, όπως στο σχήμα γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Κ. Σε μια στιγμή $t_0=0$, μετά από κατάλληλο κτύπημα, ο δίσκος αποκτά ταχύτητα κέντρου Κ ίση με $\upsilon_{cm}=2m/s$, κάθετη στην ΟΚ.



i) Να προσδιοριστεί η θέση του δίσκου τη στιγμή t_1.

ii) Κατά ποια γωνία θα περιστραφεί η ακτίνα ΟΑ, η οποία επισημανθεί με κόκκινο χρώμα, μέχρι τη στιγμή $t_1=(\pi/4)s$;

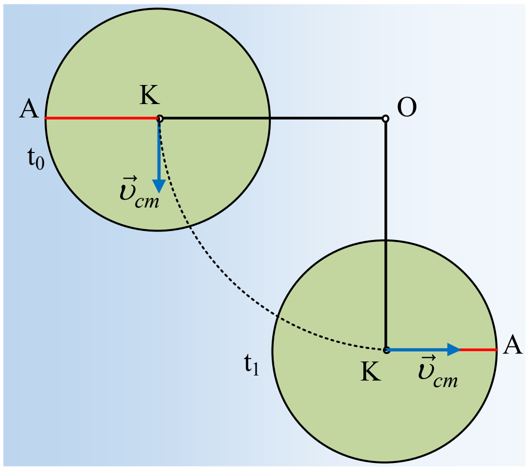
iii) Πόσες περιστροφές έκανε ο δίσκος στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

Απάντηση:

i) Ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση. Το κέντρο μάζας Κ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας τόξο ακτίνας ℓ και μήκους:

$$\Delta s_K = \upsilon_{cm} t_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} m = \frac{\pi}{2} \ \ m$$

Το παραπάνω τόξο, αντιστοιχεί στο ¼ της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας ℓ, αφού $s_T=2\pi\cdot\ell=2\pi$ (m). Με άλλα λόγια το κέντρο Κ έχει διαγράψει γωνία π/2 και έχει φτάσει στην θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα.



ii) Η ακτίνα ΚΑ του σχήματος έχει περιστραφεί (δεξιόστροφα) κατά γωνία:

$$\Delta\varphi = \omega t_1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} m = \pi \ \ rad$$

Συνεπώς έχει φτάσει στη θέση που δείχνεται στο σχήμα.

iii) Ο αριθμός των περιστροφών είναι:

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0,5$$

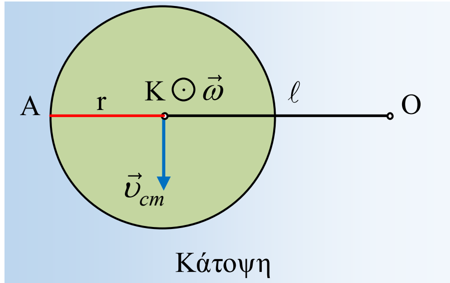
Παράδειγμα 4ο :

Ο παραπάνω δίσκος, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=4rad/s, όπως στο σχήμα (αντίθετα από την προηγούμενη φορά) γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Κ. Σε μια στιγμή $t_0=0$, μετά από κατάλληλο κτύπημα, ο δίσκος αποκτά ταχύτητα κέντρου Κ ίση με $υ_{cm}=2m/s$, κάθετη στην ΟΚ.

i) Να προσδιοριστεί η θέση του δίσκου τη στιγμή t_1.

ii) Κατά ποια γωνία θα περιστραφεί η ακτίνα ΟΑ, η οποία επισημανθεί με κόκκινο χρώμα, μέχρι τη στιγμή $t_1=(\pi/4)s$;

iii) Πόσες περιστροφές έκανε ο δίσκος στο παραπάνω χρονικό διάστημα;



Απάντηση:

i) Ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση. Το κέντρο μάζας Κ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας τόξο ακτίνας ℓ και μήκους:

$$\Delta s_K = \upsilon_{cm} t_1 = 2\cdot\frac{\pi}{4}m = \frac{\pi}{2}\ m$$

Το παραπάνω τόξο, αντιστοιχεί στο ¼ της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας ℓ, αφού $s_T=2\pi\cdot\ell=2\pi$ (m). Με άλλα λόγια το κέντρο Κ έχει διαγράψει γωνία π/2 και έχει φτάσει στην θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα.

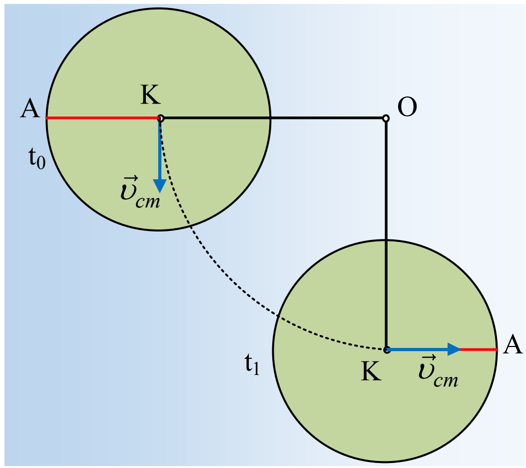
ii) Η ακτίνα ΚΑ του σχήματος έχει περιστραφεί (αριστερόστροφα) κατά γωνία:

$$\Delta\varphi = \omega t_1 = 4\cdot\frac{\pi}{4}m = \pi\ \ rad$$

Συνεπώς έχει φτάσει στη θέση που δείχνεται στο σχήμα.

iii) Ο αριθμός των περιστροφών είναι:

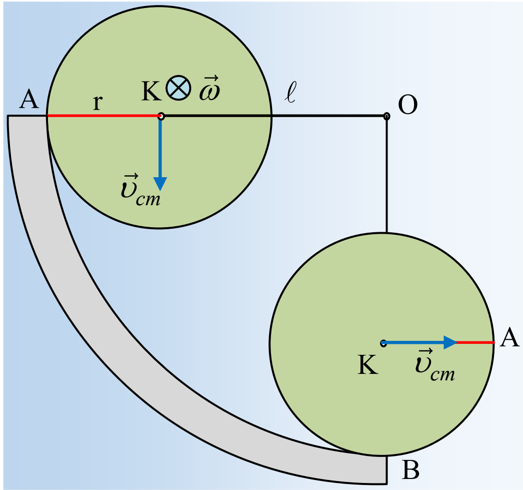
$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0,5$$



Εδώ λέω να κάνουμε μια στάση.

Υπάρχει κάτι περίεργο σε όλα αυτά; Υπάρχει λάθος; Αν ναι, ας επισημανθεί. Νομίζω ότι όλα αυτά είναι γνωστά και αποδεκτά, από όσους διδάσκουν στην Γ΄ Λυκείου.

Αν είμαστε σύμφωνοι, ας βάλουμε τώρα έναν οριζόντιο κυκλικό αγωγό στο παράδειγμα 3! Εύκολα διαπιστώνεται ότι η ταχύτητα του εκάστοτε σημείου επαφής του δίσκου με τον οδηγό, είναι μηδενική ($υ_{cm}$=ωr). Αλλά τότε μπορείτε και να αφαιρέσετε το νήμα. Αφήστε το δίσκο να κινηθεί κυλιόμενος σε επαφή με τον οδηγό!



Τι θα αλλάξει; Τίποτα!!!

Μετά από χρόνο t_1 το κέντρο του δίσκου θα έχει διαγράψει γωνία π/2 και η ακτίνα ΚΑ θα έχει στραφεί κατά π. Ο αριθμός δε τον περιστροφών θα είναι και πάλι 0,5!!!

Μπορεί να υποστηρίξει κάποιος ότι άλλαξε η φυσική πραγματικότητα επειδή βάλαμε τον οδηγό, αφού δεν επηρεάζει σε τίποτα την κίνηση; Νομίζω πως όχι!

Έρχεται τώρα ένας και σας λέει ότι θα υπολογίσει τον αριθμό των περιστροφών από την εξίσωση:

$$N = \frac{\Delta S_{οδ}}{2\pi r} = \frac{μήκος\ τόξου\ AB}{2\pi r}$$

Γιατί να το κάνει; Δικαίωμά του να το κάνει. Τι βρίσκει;

$$N = \frac{\Delta S_{οδ}}{2\pi r} = \frac{\frac{2\pi R}{4}}{2\pi r} = \frac{R}{4r} = \frac{l+r}{4r} = \frac{1+0,5}{4\cdot 0,5} = 0,75$$

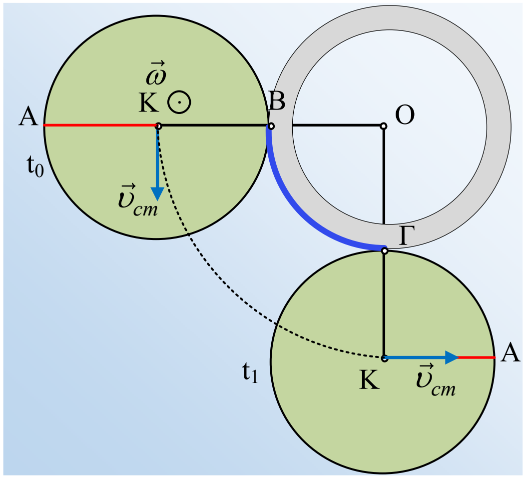
Τελικά πόσο στράφηκε ο δίσκος; Έκανε 0,75 ή 0,5 περιστροφές; Νομίζω ότι είναι φανερό ότι κάνει λάθος!

Αν θυμηθούμε το 1^{ο} παράδειγμα, πράγματι ο αριθμός των περιστροφών μπορεί να βγει με το μήκος της διαδρομής του κέντρου Κ, ως:

$$N = \frac{\Delta s_K}{2\pi r} = \frac{\frac{2\pi l}{4}}{2\pi r} = \frac{l}{4r} = 0,5\ !!!$$

Σωστό αποτέλεσμα!!!

Συμπέρασμα 1ο: Αν κάποιος θελήσει να υπολογίσει τον αριθμό των περιστροφών **δεν** πρέπει να χρησιμοποιήσει το μήκος του τόξου ΒΓ του κυκλικού οδηγού. Αν το κάνει, θα υπολογίσει **μεγαλύτερη** γωνία στροφής από την πραγματική!



Ας έρθουμε τώρα στο 4ο παράδειγμα και ας βάλουμε και εκεί τον κυκλικό οδηγό.

Τώρα βέβαια δεν θα λύσουμε το νήμα, αφού μας χρειάζεται η κεντρομόλος! Αλλά αξίζει να προσέξουμε ότι τώρα μηδενική ταχύτητα έχει το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, το σημείο Β. Οπότε τώρα ο κυκλικός οδηγός έχει ακτίνα R=ℓ-r, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Μπορούμε δηλαδή τώρα, να έχουμε μια κύλιση του δίσκου εξωτερικά του κυκλικού οδηγού.

Ξανά βέβαια η κατάσταση είναι όπως και στο 4ο παράδειγμα, δεν έχει αλλάξει κάτι η παρουσία του οδηγού και έχουμε ξανά **μισή** περιστροφή του δίσκου.

Και αν κάποιος θέλει να χρησιμοποιήσει την εξίσωση:

$$N = \frac{\Delta S_{o\delta}}{2\pi r} = \frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon\ B\Gamma}{2\pi r}$$

Τι βρίσκει;

$$N = \frac{\Delta S_{o\delta}}{2\pi r} = \frac{\frac{2\pi R}{4}}{2\pi r} = \frac{R}{4r} = \frac{l-r}{4r} = \frac{1-0,5}{4\cdot 0,5} = 0,25$$

Τελικά πόσο στράφηκε ο δίσκος; Έκανε 0,25 ή 0,5 της περιστροφής; Προφανώς έχει κάνει μισή περιστροφή.

Αν θυμηθούμε ξανά το 1ο παράδειγμα, πράγματι ο αριθμός των περιστροφών μπορεί να βγει με το μήκος της διαδρομής του κέντρου Κ, ως:

$$N = \frac{\Delta s_K}{2\pi r} = \frac{\frac{2\pi l}{4}}{2\pi r} = \frac{l}{4r} = 0,5\ !!!$$

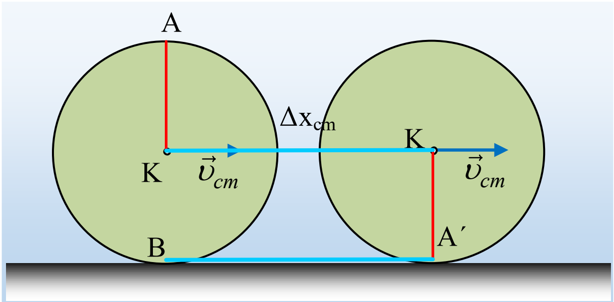
Σωστό αποτέλεσμα!!!

Συμπέρασμα 2ο: Αν κάποιος θελήσει να υπολογίσει τον αριθμό των περιστροφών **δεν** πρέπει να χρησιμοποιήσει το μήκος του τόξου ΒΓ του κυκλικού οδηγού. Αν το κάνει, θα υπολογίσει **μικρότερη** γωνία στροφής από την πραγματική!

Οι περιστροφές του δίσκου είναι περισσότερες από αυτές που υπολογίζονται με βάση το μήκος του τόξου ΒΓ του οδηγού. Και σε αυτό και πάλι, δεν φταίει ο κυκλικός οδηγός.

Η μόνη περίπτωση που το αποτέλεσμα βγαίνει σωστό, όταν κάποιος χρησιμοποιήσει το μήκος της ακίνητης επιφάνειας με την οποία έρχονται σε επαφή τα διάφορα σημεία του δίσκου, είναι στο 1ο παράδειγμα. Γιατί;

Γιατί μόνο εκεί, τα μήκη Δx και ΒΑ΄του παρακάτω σχήματος, είναι ίσα…



Σχόλιο:

Επειδή κάποιοι μπορούν να εκπλήσσονται με τη λογική ποιο τόξο πρέπει να διαιρέσουμε με το 2πr για να βρούμε τον αριθμό των περιστροφών, ας το δούμε λίγο θεωρητικά:

Ένας δίσκος κυλίεται σε ακίνητη επιφάνεια (ανεξαρτήτως σχήματος) αν ισχύει ο σύνδεσμος $\upsilon_{cm}=\omega\cdot r$, όπου η εξίσωση αυτή συνδέει τα μέτρα της ταχύτητας του κ.μ. και της γωνιακής ταχύτητας. Αλλά τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\upsilon_{cm}=\omega\cdot r\rightarrow\frac{ds_{cm}}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\cdot r\rightarrow ds_{cm}=r\cdot d\varphi\rightarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2}ds_{cm}=\int_{t_1}^{t_2}r\cdot d\varphi=r\cdot\int_{t_1}^{t_2}d\varphi\rightarrow$$

$$s_{cm}=r\cdot\varphi_{o\lambda}$$

Βλέπουμε δηλαδή η συνολική γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί ο δίσκος συνδέεται με το μήκος της διαδρομής του κέντρου Κ και όχι του κυκλικού (ή όποιου άλλου σχήματος) οδηγού. Αλλά τότε ο αριθμός των περιστροφών θα υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$N=\frac{\varphi_{o\lambda}}{2\pi}=\frac{\frac{s_{cm}}{r}}{2\pi}=\frac{s_{cm}}{2\pi r}$$

Και αυτό ανεξάρτητα της γεωμετρικής μορφής της ακίνητης επιφάνειας πάνω στην οποία κυλίεται ένα στερεό κυκλικής διατομής.

dmargaris@gmail.com