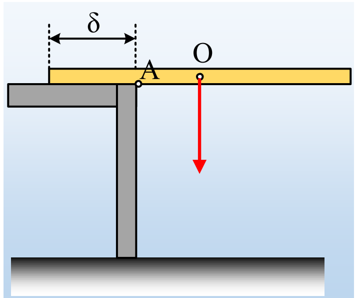
Μέχρι η ράβδος να ολισθήσει…

Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=3m και μάζας M=40kg συγκρατείται σε οριζόντια θέση, ενώ ένα τμήμα της μήκους δ=1m στηρίζεται πάνω σε τραπέζι, όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη την ράβδο να πέσει και παρατηρούμε ότι στρέφεται γύρω από το άκρο Α του τραπεζιού, μέχρι να στραφεί κατά 12°, αφού στη συνέχεια ολισθαίνει.



i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της ράβδου, στη θέση που αρχίζει η ολίσθηση.

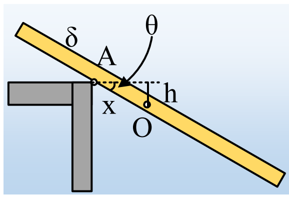
ii) Πόση είναι η κάθετη αντίδραση του τραπεζιού, στην παραπάνω θέση;

iii) Να υπολογιστεί ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τραπεζιού.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της $I_{cm}=m\ell^2/12$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$, ενώ για την γωνία των 12° , ημθ=0,2 και συνθ=0,98.

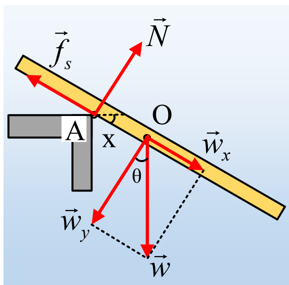
Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα η ράβδος έχει σχεδιαστεί στην θέση που θα αρχίσει η ολίσθηση, έχοντας περιστραφεί κατά γωνία θ=12°, γύρω από το άκρο Α του τραπεζιού, το οποίο απέχει κατά x=ℓ/2-δ=0,5m από το μέσον (κέντρο μάζας) Ο της ράβδου. Στη θέση αυτή το κέντρο μάζας Ο έχει κατέβει κατά h από την αρχική του θέση με την ράβδο οριζόντια, οπότε έχει μειωθεί η δυναμική ενέργεια της ράβδου κατά ΔU=Mgh και αντίστοιχα έχουμε ισόποση αύξηση της κινητικής ενέργειας. Έτσι στην θέση αυτή έχει κινητική ενέργεια:



$$K = Mgh = Mgx\cdot ημθ = 40\cdot 10\cdot 0,5\cdot 0,2J = 40J$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στη ράβδο, όπου f_s η στατική τριβή από το τραπέζι. Για την περιστροφή της ράβδου γύρω από (νοητό) οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το Α ισχύει (θετική η φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού):



$$Στ_A = I_A\cdot α_{γων} \rightarrow Mg\cdot συνθ\cdot x = I_A\cdot α_{γων} \quad (1)$$

Όπου με την βοήθεια Steiner βρίσκουμε την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής:

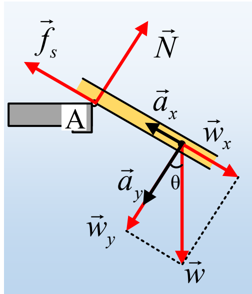
$$I_A = I_{cm} + Mx^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + Mx^2 = \frac{1}{12}40\cdot 3^2 kgm^2 + 40\cdot 0,5^2 kgm^2 = 40kgm^2.$$

Με αντικατάσταση στην (1), παίρνουμε:

$$α_{γων} = \frac{Mg\cdot συνθ\cdot x}{I_A} = \frac{40\cdot 10\cdot 0,98\cdot 0,5}{40} rad/s^2 = 4,9rad/s^2.$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας Ο, έχει επιτρόχια επιτάχυνση, κάθετη στην ΑΟ, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_y = \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 4,9 \cdot 0,5 m/s^2 = 2,45 m/s^2 .$$



Τέλος εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας, θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = Ma_x \to f_s - Mg \cdot \eta\mu\theta = M\alpha_x \quad (2)$$
$$\Sigma F_y = Ma_y \to w_y - N = Ma_y \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε:

$$N = w_y - Ma_y = Mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - M\alpha_y = 40 \cdot 10 \cdot 0,98 N - 40 \cdot 2,45 N = 294 N$$

iii) Επανερχόμαστε στην εξίσωση (2), όπου στην διεύθυνση x, στη διεύθυνση της ακτίνας, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι κεντρομόλος, αφού το Ο εκτελεί κυκλική κίνηση, γύρω από το Α.

$$f_s - Mg \cdot \eta\mu\theta = M\alpha_x \quad \to f_s - Mg \cdot \eta\mu\theta = M\frac{\upsilon_{cm}^2}{R} = M\omega^2 \cdot (AO)$$

Όμως από την εξίσωση της κινητικής ενέργειας, βρίσκουμε:

$$K = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \to \omega = \sqrt{\frac{2K}{I_A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{40}} rad/s = \sqrt{2} rad/s \to$$

$$f_s = Mg \cdot \eta\mu\theta + M\omega^2 \cdot (AO) = 40 \cdot 10 \cdot 0,2 N + 40 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 0,5 N = 120 N$$

Οπότε από τον νόμο της τριβής, θεωρώντας ότι η παραπάνω τιμή είναι η οριακή, θα έχουμε:

$$f_s = \mu_s \cdot N \to \mu_s = \frac{f_s}{N} = \frac{120}{294} \approx 0,4$$

dmargaris@gmail.com