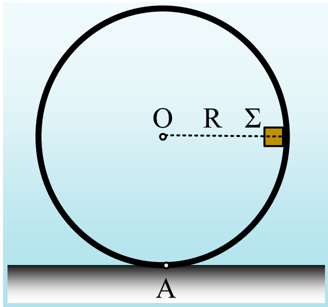
Δυο παραλλαγές. Η 2η … δύσκολη.



Ένα σώμα Σ μάζας m (αμελητέων διαστάσεων) τοποθετείται στην εσωτερική λεία επιφάνεια, ενός κενού κυλίνδρου, μάζας M=2m και ακτίνας R=1m, όπως στο σχήμα, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, ενώ ο κύλινδρος συγκρατείται ακίνητος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερα το σώμα Σ και τον κύλινδρο να κινηθούν. Δίνεται ότι ο κύλινδρος κυλίεται, ενώ τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στην κατώτερη θέση της τροχιάς του, έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1$, ενώ ο άξονας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα μέτρου $υ_{cm}=υ_2$.

i) Το οριζόντιο επίπεδο είναι ή όχι λείο;

ii) Για τα μέτρα των δύο ταχυτήτων ισχύει:

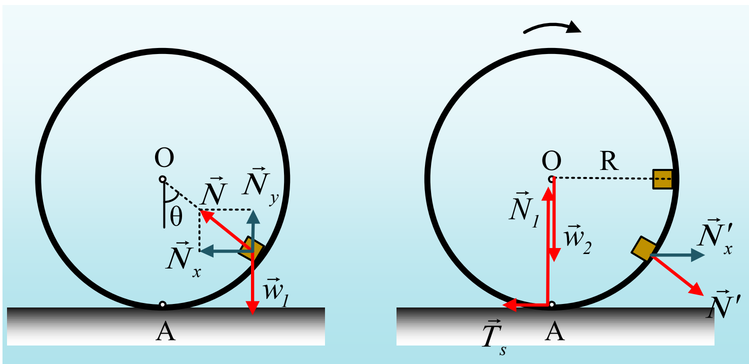
α) $υ_1=υ_2$, β) $υ_1=2υ_2$, γ) $υ_1=3υ_2$, δ) $υ_1= 4υ_2$.

iii) Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητα $υ_1$ του σώματος Σ, στην κατώτερη θέση της τροχιάς του.

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ η μάζα του κυλίνδρου θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

Απάντηση:

i) Στο παρακάτω σχήμα, αριστερά οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και δεξιά οι δυνάμεις στον κύλινδρο.



Το σώμα Σ δέχεται από τον κύλινδρο την «κάθετη αντίδραση Ν» η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο Ο. Η αντίδρασή της Ν΄ είναι αυτή που πρόκειται να επιταχύνει προς τα δεξιά τον κύλινδρο. Όμως η Ν΄ δεν παρουσιάζει ροπή ως προς το κέντρο Ο, συνεπώς αν το επίπεδο ήταν λείο, ο κύλινδρος δεν θα αποκτούσε κάποια γωνιακή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα να μην στρέφεται. Εδώ όμως έχουμε ως δεδομένο ότι ο κύλινδρος **κυλίεται**, άρα χρειάζεται μια ροπή και αυτή είναι η ροπή της στατικής τριβής, η οποία έχει την κατεύθυνση του σχήματος με αποτέλεσμα να περιστρέφει τον κύλινδρο σύμφωνα με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

ii) Αν στην τυχαία θέση του Σ, όπως στο πρώτο σχήμα, η ακτίνα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, τότε το σώμα επιταχύνεται στην οριζόντια διεύθυνση με επιτάχυνση $α_1$, όπου:

$$\Sigma F_{x,1} = m_1 a_1 \to N_x = m_1 a_1 \to N \cdot \eta\mu\theta = m_1 a_1 \ (1)$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον 2^o νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου (δουλεύουμε με μέτρα):

$$\Sigma F_{x,2} = m_2 a_{cm} \rightarrow N'_x - T_s = Ma_2 \rightarrow N \cdot \eta\mu\theta - T_s = Ma_2 \ \ (2)$$

Ενώ ο ίδιος νόμος για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου, μας δίνει:

$$\Sigma\tau_o = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s R = MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s = MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R}$$
$$T_s = M \cdot \alpha_2 \quad (3)$$

Από (2) και (3) παίρνουμε:

$$N \cdot \eta\mu\theta = 2Ma_2 \ \ (4)$$

Από (1) και (4) έχουμε:

$$m_1 a_1 = 2M\alpha_2 \rightarrow m_1 a_1 = 2 \cdot 2m_1 \alpha_2 \rightarrow$$
$$a_1 = 4\alpha_2$$

Αν όμως κάθε στιγμή το σώμα Σ έχει στην οριζόντια διεύθυνση τετραπλάσια επιτάχυνση (κατά μέτρο) από τον κύλινδρο, τότε θα έχει και τετραπλάσια ταχύτητα υ_x από αυτόν. Έτσι τη στιγμή που φτάνει στο σημείο Α θα έχει ταχύτητα υ_1, μέτρου τετραπλάσιου, του μέτρου της ταχύτητας του κυλίνδρου.

$$\upsilon_1 = 4\upsilon_2$$

Σωστό το δ).

iii) Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΔΜΕ μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων, παίρνουμε:

$$mgR = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 \rightarrow$$
$$mgR = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2 \xrightarrow{\upsilon_2 = \omega R}$$
$$mgR = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} M\upsilon_2^2 \rightarrow mgR = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + 2m\left(\frac{\upsilon_1}{4}\right)^2$$
$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{8gR}{5}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10 \cdot 1}{5}} m/s = 4m/s$$

dmargaris@gmail.com