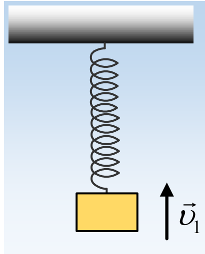
Οι ρυθμοί πάνε και έρχονται



Ένα σώμα μάζας 1kg ταλαντώνεται κατακόρυφα, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, με πλάτος A=0,5m. Κάποια στιγμή το σώμα κινείται προς τα πάνω, με ταχύτητα μέτρου υ_1=4m/s. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

i) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

ii) Η ισχύς της δύναμης επαναφοράς, η αντίστοιχη ισχύς της δύναμης του ελατηρίου και η ισχύς του βάρους.

iii) Οι ρυθμοί μεταβολής:

α) της κινητικής ενέργειας του σώματος,

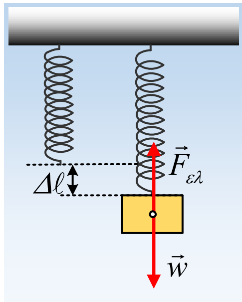
β) της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης,

γ) της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος,

δ) της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας. Από την συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

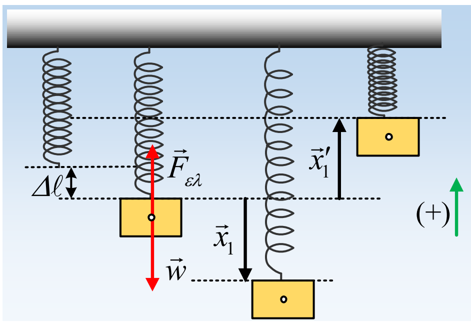
$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow Δ\ell=\frac{mg}{k}=\frac{1\cdot 10}{100}m=0,1m$$

Εξάλλου από την ενέργεια ταλάντωσης βρίσκουμε:

$$K+U=E \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$

$$x_1=\pm\sqrt{A^2-\frac{m}{k}\upsilon_1^2}=\pm\sqrt{0,5^2-\frac{1}{100}4^2}m=\pm 0,3m$$

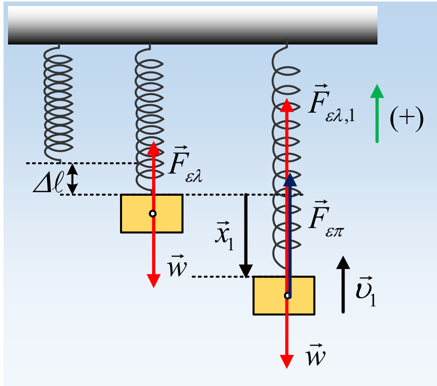


Τι σημαίνει το $\pm 0,3m$ που βρήκαμε; Το σώμα καθώς κινείται προς τα πάνω, περνά από δυο θέσεις, η μια κάτω από την θέση ισορροπίας (θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω) η x_1=-0,3m και η άλλη, πάνω από την θέση ισορροπίας με απομάκρυνση x_1'=+0,3m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με βάση αυτά ας δούμε ποιες οι απαντήσεις για τις δύο παραπάνω θέσεις:

1) Για την θέση x_1=-0,3m, κάτω από την θέση ισορροπίας:

i) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση:



$$U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}100\cdot(-0,3)^2 J = 4,5J$$

Ενώ η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση:

$|Δ\ell_1| = (|x_1| + Δ\ell) = (0,3+0,1)N = 0,4m$, οπότε:

$$U_{ελ,1} = \frac{1}{2}k(Δ\ell_1)^2 = \frac{1}{2}100\cdot 0,4^2 J = 8J$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, βάρος και $F_{ελ}$, όπου η συνισταμένη τους είναι η δύναμη επαναφοράς, με κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας, με τιμή:

$$F_{επ}=-Dx_1=-100\cdot(-0,3)N=+30N.$$

Έτσι για την ισχύ της έχουμε:

$$P_{Fεπ}=F_{επ}\cdot υ_1=30\cdot 4W=120W$$

Η δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$F_{ελ,1}= k\cdot Δ\ell_1 = k\left(Δ\ell + |x_1|\right) = 100\cdot 0,4N = 40N$$

Έχει ισχύ:

$$P_{Fελ,1}=F_{ελ,1}\cdot υ_1=40\cdot 4W=160W$$

Ενώ για την ισχύ του βάρους έχουμε:

$$P_w=-w\cdot υ_1=-mg\cdot υ_1=-10\cdot 4W=-40W$$

iii) Για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:

α) $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{dW_{ολ}}{dt} = \dfrac{|ΣF|\cdot|dx|\cdot συν0°}{dt} = |F_{επ}|\cdot|υ_1| = 30\cdot 4J/s = 120J/s$

β) $\dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{dW_{F_{επ}}}{dt} = -\dfrac{|F_{επ}|\cdot|dx|\cdot συν0°}{dt} = -|F_{επ}|\cdot|υ_1| = -30\cdot 4J/s = -120J/s$

γ) $\dfrac{dU_{ελ}}{dt} = -\dfrac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = -\dfrac{|F_{ελ}|\cdot|dx|\cdot συν0°}{dt} = -|F_{ελ}|\cdot|υ_1| = -40\cdot 4J/s = -160J/s$

δ) $\dfrac{dU_β}{dt} = -\dfrac{dW_w}{dt} = -\dfrac{|w|\cdot|dx|\cdot συν180°}{dt} = +mg\cdot υ_1 = 10\cdot 4J/s = 40J/s$

Αξίζει να επισημάνουμε δύο σημεία.

Α) Οι ρυθμοί μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετοι (+120J/s και -120J/s), αφού αυτό επιβάλει η σταθερή ενέργεια ταλάντωσης.

Β) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης δεν είναι τίποτα άλλο από το άθροισμα, της ενέργειας ελατηρίου και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Έτσι για τους αντίστοιχους ρυθμούς βρήκαμε τις τιμές:

-120J/s= -160J/s + 40J/s.

2) Για την θέση $x_1' = 0,3m$, πάνω από την θέση ισορροπίας:

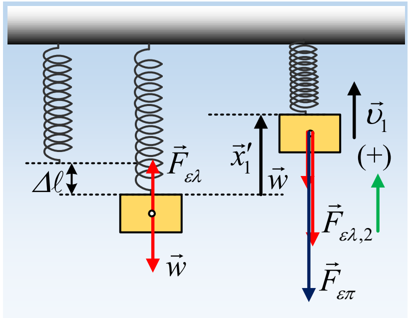
i) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση:

$$U_2 = \frac{1}{2}Dx_1'^2 = \frac{1}{2}kx_1'^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0,3^2 J = 4,5J$$

Ενώ η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση:

$|\Delta\ell_2| = \left(|x_1'| - \Delta\ell\right) = (0,3-0,1)N = 0,2m$, οπότε:

$$U_{\varepsilon\lambda,2} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0,2^2 J = 2J$$



ii) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, βάρος και $F_{\varepsilon\lambda,2}$, όπου η συνισταμένη τους είναι η δύναμη επαναφοράς, με κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας, με τιμή:

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dx_1 = -100 \cdot (0,3)N = -30N.$$

Έτσι για την ισχύ της έχουμε:

$$P_{F\varepsilon\pi} = -|F_{\varepsilon\pi}| \cdot \upsilon_1 = -30 \cdot 4W = -120W$$

Η δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$F_{\varepsilon\lambda,2} = k \cdot \Delta\ell_2 = 100 \cdot 0,2N = 20N$$

Έχει ισχύ:

$$P_{F\varepsilon\lambda,1} = -|F_{\varepsilon\lambda,2}| \cdot \upsilon_1 = -20 \cdot 4W = -80W$$

Ενώ για την ισχύ του βάρους έχουμε:

$$P_w = -w \cdot \upsilon_1 = -mg \cdot \upsilon_1 = -10 \cdot 4W = -40W$$

iii) Για τους ζητούμενους ρυθμούς μεταβολής θα έχουμε:

α) $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{dW_{o\lambda}}{dt} = \dfrac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu 180°}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |\upsilon_1| = 30 \cdot 4J/s = -120J/s$

β) $\dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -\dfrac{|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu 180°}{dt} = +|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |\upsilon_1| = 30 \cdot 4J/s = 120J/s$

γ) $\dfrac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\dfrac{dW_{F_{\varepsilon\lambda}}}{dt} = -\dfrac{|F_{\varepsilon\lambda}| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu 180°}{dt} = +|F_{\varepsilon\lambda}| \cdot |\upsilon_1| = 20 \cdot 4J/s = 80J/s$

δ) $\dfrac{dU_{\beta}}{dt} = -\dfrac{dW_w}{dt} = -\dfrac{|w| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu 180°}{dt} = +mg \cdot \upsilon_1 = 10 \cdot 4J/s = 40J/s$

Και πάλι δηλαδή βλέπουμε ότι:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}+\frac{dU_{\beta}}{dt} \quad (1)$$

Σχόλιο:

Αφού αποδείξαμε παραπάνω την σχέση (1), θα μπορούσε κάποιος να γράψει και την σχέση:

$$U=U_{\varepsilon\lambda}+U_{\beta} \quad (2)$$

Όπου U η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης. Είναι σωστή η σχέση (2);

Μαθηματικά από την (1) δεν προκύπτει η (2) αλλά η εξίσωση:

$$U=U_{\varepsilon\lambda}+U_{\beta}+C \quad (3)$$

Όπου C μια σταθερά.

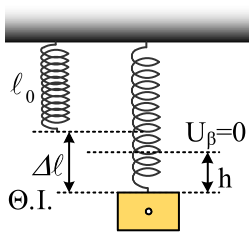
Από την ματιά της Φυσικής τώρα. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ορίσθηκε, αφού αυθαίρετα θεωρήθηκε ότι το σώμα αρχικά στην θέση ισορροπίας του, έχει μηδενική ενέργεια.

Αλλά αυθαίρετα ορίζεται και το επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας! Αλλά τότε πόση είναι η μηχανική ενέργεια στην αρχική θέση ισορροπίας; Δεν ξέρουμε!!!

Εκτός και αν αποφασίσουμε να ορίσουμε ως $U_{\beta}=0$ ένα κατάλληλο οριζόντιο επίπεδο, όπου να προκύπτει ότι στην αρχική θέση ισορροπίας $U_{\varepsilon\lambda}+U_{\beta}=0$.

Οι μαθηματικοί θα λέγανε, να βρούμε πότε η σταθερά στην εξίσωση (3) μηδενίζεται!

Ας το βρούμε:



Αφού η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας είναι θετική, θα πρέπει η βαρυτική δυναμική ενέργεια να είναι αρνητική για να ισχύει $U_{\varepsilon\lambda}+U_{\beta}=0$.

Αλλά τότε το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θα είναι πάνω από την Θ.Ι. όπως στο σχήμα, έστω σε ύψος h. Οπότε τότε:

$$\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2-mgh=0 \rightarrow h=\frac{k\left(\Delta\ell\right)^2}{2mg}=\frac{k\left(\Delta\ell\right)^2}{2k\cdot\Delta\ell} \rightarrow$$

$$h=\frac{1}{2}\Delta\ell$$

Στην περίπτωση αυτή η μηχανική ενέργεια του συστήματος και η ενέργεια ταλάντωσης ταυτίζονται. Σε κάθε άλλη περίπτωση έχουν διαφορετικές τιμές.

dmargaris@gmail.com