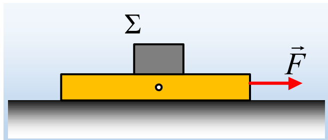
Ενέργεια αφαιρείται, αλλά και μεταφέρεται

Παρακάτω θα εξετάσουμε μερικές περιπτώσεις σωμάτων, όπου το έργο κάποιας δύναμης είναι αρνητικό. Τι ακριβώς μετράει το έργο αυτό; Τι σχέση έχουν τα έργα των δυνάμεων δράσης – αντίδρασης, οι οποίες ασκούνται σε δύο σώματα;

Εφαρμογή 1η :



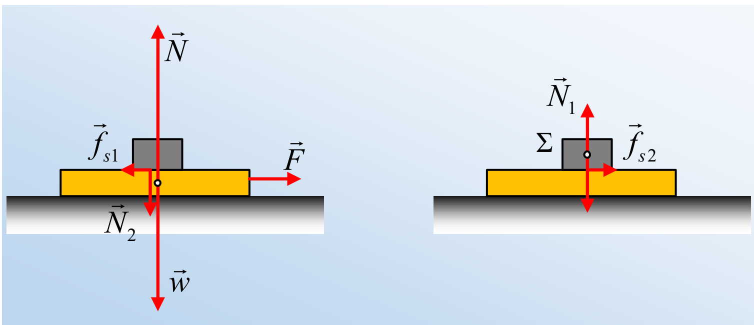
Η σανίδα του σχήματος έχει μάζα M=10kg ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F=6N. Πάνω στην σανίδα υπάρχει ένα σώμα Σ μάζας m=2kg, το οποίο παρασύρεται κινούμενο μαζί της, χωρίς να ολισθαίνει. Για μετατόπιση των σωμάτων κατά x=4m, να υπολογιστούν:

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από την σανίδα, μέσω του έργου της στατικής τριβής f_{s1} που ασκείται πάνω της.

ii) Η ενέργεια η οποία μεταφέρεται στο σώμα Σ.

Απάντηση:

Ας δουλέψουμε με βάση την δυναμική των δύο σωμάτων. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα και στο σώμα Σ.



Για τη σανίδα: $\Sigma F_x = M\alpha \rightarrow F - f_{s1} = M\alpha$ (1)

Για το σώμα Σ: $\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow f_{s2} = m\alpha$ (2)

Όπου f_{s1} η στατική τριβή η οποία ασκείται στη σανίδα και f_{s2} η αντίδρασή της, η οποία ασκείται στο Σ.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) βρίσκουμε:

$$F = (M+m)a \rightarrow a = \frac{F}{M+m} = \frac{6}{10+2} m/s^2 = 0,5 m/s^2.$$

Οπότε για το μέτρο της ασκούμενης τριβής έχουμε:

$$|f_{s1}| = |f_{s2}| = ma = 2\cdot 0,5N = 1N$$

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από την σανίδα είναι ίση με το έργο της ασκούμενης πάνω της στατικής τριβής:

$$W_{F_{s1}} = |F_{s1}|\cdot|x|\cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -|F_{s1}|\cdot|x| = -1\cdot 4J = -4J$$

ii) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Σ, είναι ίση με το έργο της στατικής τριβής που επιταχύνει το σώμα:

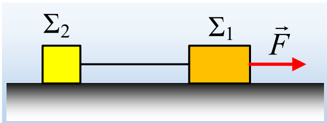
$$W_{F_{s2}} = |F_{s2}| \cdot |x| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = |F_{s2}| \cdot |x| = 1 \cdot 4J = 4J$$

Βλέπουμε ότι όση ενέργεια αφαιρείται από την σανίδα, μεταφέρεται στο σώμα Σ, πράγμα αναμενόμενο, αφού δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των δύο σωμάτων για να θερμανθούν οι δύο επιφάνειες…

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε με την βοήθεια μόνο των έργων, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καθόλου Δυναμική. Παραπάνω προτιμήθηκε ο υπολογισμός των δυνάμεων…

Εφαρμογή 2η :

Το σώμα $Σ_1$ μάζας M=10kg ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F=6N, δεμένο μέσω μη εκτατού και αμελητέας μάζας νήματος, με δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m=2kg, το οποίο παρασύρει. Για μετατόπιση των σωμάτων κατά x=4m, να υπολογιστούν:

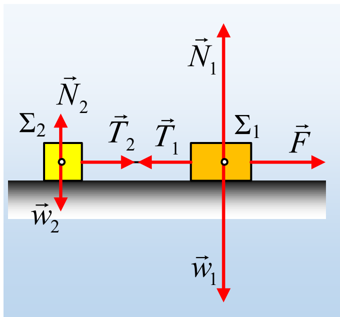


i) Η ενέργεια που αφαιρείται από το $Σ_1$, μέσω του έργου της τάσης του νήματος που ασκείται πάνω του.

ii) Η ενέργεια η οποία μεταφέρεται στο σώμα $Σ_2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου $T_1=T_2$ τα μέτρα των δυνάμεων, που το νήμα ασκεί στα σώματα (η τάση του νήματος). Δουλεύοντας όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, έχουμε:



Για το σώμα $Σ_1$: $ΣF_x=Mα \rightarrow F\text{-}T_1=Mα$ (1)

Για το σώμα $Σ_2$: $ΣF_x=mα \rightarrow T_2=mα$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) βρίσκουμε:

$$F = (M+m)a \rightarrow a = \frac{F}{M+m} = \frac{6}{10+2} m/s^2 = 0{,}5 m/s^2.$$

Οπότε για το μέτρο της τάσης του νήματος έχουμε:

$$|T_1| = |T_2| = ma = 2 \cdot 0{,}5N = 1N$$

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα $Σ_1$ είναι ίση με το έργο της ασκούμενης πάνω του τάσης του νήματος:

$$W_{T_1} = |T_1| \cdot |x| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -|T_1| \cdot |x| = -1 \cdot 4J = -4J$$

ii) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Σ, είναι ίση με το έργο της τάσης του νήματος που το επιταχύνει:

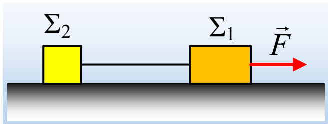
$$W_{T_2} = |T_2| \cdot |x| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = |T_2| \cdot |x| = 1 \cdot 4J = 4J$$

Βλέπουμε ότι όση ενέργεια αφαιρείται από το $Σ_1$, μεταφέρεται στο σώμα $Σ_2$, πράγμα αναμενόμενο, αφού δεν ασκείται κάποια άλλη δύναμη που να παράγει έργο στα δυο σώματα και δεν αλλάζει το μήκος του νήματος, με αποτέλεσμα το νήμα να λειτουργεί απλά σαν ένας δεσμός που εξαναγκάζει τα δυο σώματα να κινούνται μαζί…

Αξίζει να δείτε την πλήρη **ταύτιση** με την πρώτη εφαρμογή. Στην πρώτη ο δεσμός είναι η δύναμη στατικής τριβής, στη δεύτερη το νήμα.

Εφαρμογή 3η :

Το σώμα Σ$_1$ μάζας M=10kg ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F=30N, δεμένο μέσω μη εκτατού και αμελητέας μάζας νήματος, με δεύτερο σώμα Σ$_2$ μάζας m=2kg, το οποίο παρασύρει.



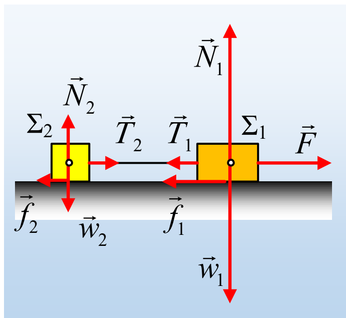
Τα σώματα εμφανίζουν με το επίπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,2. Για μετατόπιση των σωμάτων κατά x=4m, να υπολογιστούν:

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από το Σ$_1$, μέσω των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.

ii) Η ενέργεια η οποία μεταφέρεται στο σώμα Σ$_2$.

Απάντηση:

Υπολογίζουμε αρχικά τις δύο τριβές ολίσθησης, οι οποίες ασκούνται στα σώματα:



$f_1=\mu N_1=\mu Mg=0{,}2\cdot 10\cdot 10N=20N$ και

$f_2=\mu N_2=\mu mg=0{,}2\cdot 2\cdot 10N=4N$

Δουλεύοντας όπως και προηγούμενα έχουμε:

Για το σώμα Σ$_1$: $\Sigma F_x=M\alpha \rightarrow F-f_1-T_1=M\alpha$ (1)

Για το σώμα Σ$_2$: $\Sigma F_x=m\alpha \rightarrow T_2-f_2=m\alpha$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) βρίσκουμε:

$$F-f_1-f_2=(M+m)a \rightarrow a=\frac{F-f_1-f_2}{M+m}=\frac{30-20-4}{10+2}m/s^2=0{,}5m/s^2.$$

Οπότε για το μέτρο της τάσης του νήματος έχουμε:

$$|T_1|=|T_2|=ma+f_2=2\cdot 0{,}5N+4N=5N$$

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα Σ$_1$ είναι ίση με το έργο των δυνάμεων T$_1$ και f$_1$, οι οποίες σχηματίζουν γωνία 180° με την μετατόπιση:

$$E_{1,\alpha\varphi}=W_{f_1}+W_{T_1}=|f_1|\cdot|x|\cdot\sigma\upsilon\nu 180°+|T_1|\cdot|x|\cdot\sigma\upsilon\nu 180° \rightarrow$$
$$E_{1,\alpha\varphi}-|f_1|\cdot|x|-|T_1|\cdot|x|=-20\cdot 4J-5\cdot 4J=-100J$$

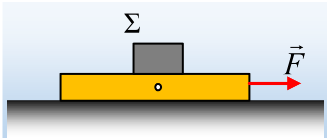
ii) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Σ, είναι ίση με το έργο της τάσης του νήματος που το επιταχύνει:

$$W_{T_2}=|T_2|\cdot|x|\cdot\sigma\upsilon\nu 0°=|T_2|\cdot|x|=5\cdot 4J=20J$$

Σε αυτήν την εφαρμογή εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ενέργειες «που μεταφέρονται» και «που αφαιρούνται», δεν είναι ίσες. Το σώμα $Σ_1$ χάνει ενέργεια 100J, αλλά μόνο τα 20J μεταφέρονται στο Β σώμα. Τα υπόλοιπα 80J εμφανίζονται ως θερμική ενέργεια εξαιτίας της τριβής ολίσθησης θερμαίνοντας τις επιφάνειες επαφής.

Αν όμως θεωρήσουμε ως σύνδεσμο το νήμα, αφού τα δυο σώματα είναι συνδεδεμένα και κινούνται μαζί, οι δυνάμεις T_1 και T_2, αν θεωρηθούν ως δράση -αντίδραση (το νήμα να θεωρηθεί απλά ως το μέσον δια του οποίου μπορούν να ασκηθούν οι δύο δυνάμεις…) παράγουν αντίθετα έργα. Όση ενέργεια «φεύγει» μέσω του νήματος προς το $Σ_2$, τόση «φτάνει» στο $Σ_2$.

Εφαρμογή 4η :



Ας επιστρέψουμε τώρα στην 1η εφαρμογή όπου έχουμε ολίσθηση του σώματος Σ πάνω στη σανίδα.

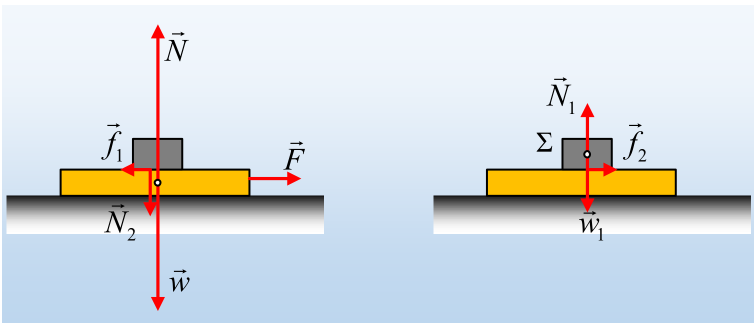
Η σανίδα έχει μάζα M=10kg και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ πάνω του ισορροπεί ένα σώμα Σ μάζας m=2kg, ενώ μεταξύ των σωμάτων μπορεί να αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης με συντελεστή τριβής μ=0,1. Κάποια στιγμή t_0=0, ασκούμε στη σανίδα μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=17N. Μέχρι τη στιγμή t_1=4s, να υπολογιστούν:

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από την σανίδα, μέσω του έργου της τριβής που ασκείται πάνω της.

ii) Η ενέργεια η οποία μεταφέρεται στο σώμα Σ.

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε σανίδα και σώμα Σ:



Για το μέτρο της τριβής ισχύει:

$$|f_1| = |f_2| = \mu N_1 = \mu mg = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 10N = 2N$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα, χωριστά για κάθε σώμα δίνει:

Για τη σανίδα: $ΣF_x=Mα_1 \rightarrow F\text{-}f_1=Mα_1 \rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{F - f_1}{M} = \frac{17N - 2N}{10kg} = 1{,}5m/s^2.$$

Οπότε τη στιγμή t_1 έχει ταχύτητα $υ_1=α_1 \cdot t_1=1{,}5 \cdot 4$m/s=6m/s, έχοντας μετατοπισθεί κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}1{,}5 \cdot 4^2 m = 12m$$

i) Η ενέργεια η οποία αφαιρείται από την σανίδα, είναι ίση με το έργο της τριβής ολίσθησης:

$$W_{f_1} = |f_1| \cdot |x_1| \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -|f_1| \cdot |x_1| = -2 \cdot 12J = -24J$$

ii) Για το σώμα Σ: $\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow f_2 = m\alpha_2 \rightarrow$

$$\alpha_2 = \frac{f_2}{m} = \frac{2N}{2kg} = 1m/s^2.$$

Με αποτέλεσμα μέχρι τη στιγμή t_1 να έχει μετατοπισθεί κατά:

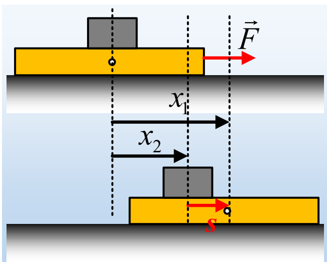
$$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t_1^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 4^2 m = 8m$$

Οπότε η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Σ, είναι ίση με το έργο της f_2:

$$W_{f2} = |f_2| \cdot |x_2| \cdot \sigma\upsilon\nu 0° = |f_2| \cdot |x_2| = 2 \cdot 8J = 16J$$

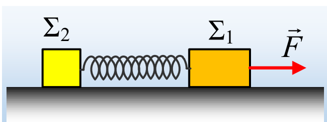
Προσοχή:

1. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα έργα δράσης – αντίδρασης δεν είναι πια αντίθετα. Εδώ τα σώματα έχουν άνισες μετατοπίσεις, οπότε προκύπτουν και έργα διαφορετικά, κατά απόλυτο τιμή.
2. Η ενέργεια που «χάνει» η σανίδα είναι ίση με 24J, ενώ στο σώμα Σ «μεταφέρεται» ενέργεια 16J. Προφανώς τα υπόλοιπα 8J είναι η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, καθώς τρίβονται οι επιφάνειες των σωμάτων.
3. Στο ερώτημα πόσο γλίστρησε το σώμα Σ, η απάντηση είναι ότι γλίστρησε κατά $s=x_1-x_2=4m$, οπότε η ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική είναι ίση:



$$Q_\theta = |f| \cdot s = 2 \cdot 4J = 8J$$

Εφαρμογή 5η :



Τα σώματα Σ_1 μάζας M=10kg και Σ_2 μάζας m=2kg, ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου. Κάποια στιγμή ασκούμε στο Σ_1 μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=10N, οπότε μετά από μετατόπιση του σώματος κατά 4m, έχει ταχύτητα υ_1=2,5m/s. Την ίδια στιγμή το σώμα Σ_2 έχει ταχύτητα υ_2=2,2m/s.

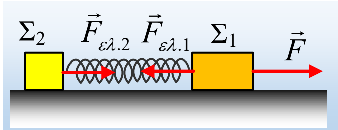
Να υπολογιστούν για την παραπάνω μετακίνηση:

i) Η ενέργεια που αφαιρείται από το Σ_1, μέσω του έργου της δύναμης του ελατηρίου η οποία ασκείται πάνω του.

ii) Η ενέργεια η οποία μεταφέρεται στο σώμα Σ_2.

Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.



i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την παραπάνω μετακίνηση του Σ_1:

$$K_1 - K_0 = W_F + W_{F_{\varepsilon\lambda.1}} + W_{w1} + W_{N_1} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 - 0 = Fx_1 + W_{F_{\varepsilon\lambda.1}} + 0 + 0 \rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda.1}} = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 - Fx_1 = \frac{1}{2}10\cdot 2,5^2 J - 10\cdot 4J = 31,25J - 40J = -8,75J$$

Ενέργεια δηλαδή 8,75J αφαιρείται από το σώμα Σ_1, μέσω του ελατηρίου.

ii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την παραπάνω μετακίνηση του Σ_2:

$$K_2 - K_0 = W_{F_{\varepsilon\lambda.2}} + W_{w2} + W_{N_2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - 0 = W_{F_{\varepsilon\lambda.2}} + 0 + 0 \rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda.2}} = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J = 4J$$

Ενέργεια δηλαδή 4J μεταφέρεται μέσω του ελατηρίου στο σώμα Σ_2.

Σχόλια:

1. Το ελατήριο αφαίρεσε ενέργεια 8,75J από το σώμα Σ_1 και έδωσε ενέργεια 4J στο σώμα Σ_2. Αυτό σημαίνει ότι έχει κρατήσει το ίδιο ενέργεια 8,75J-4J=4,75J, η οποία αποθηκεύεται με την μορφή της δυναμικής ελαστικής ενέργειας. Έχουμε δηλαδή τη στιγμή t_1:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2 = 4,75J$$

2. Αξίζει να συγκριθεί η παραπάνω περίπτωση με τα συμπεράσματα της εφαρμογής 2, όπου υπάρχει νήμα μεταξύ των σωμάτων. Αυτό επιβάλλει την ίδια μετατόπιση των σωμάτων, με αποτέλεσμα όση ενέργεια αφαιρείται από το Σ_1 μεταφέρεται στο Σ_2. Αντίθετα το ελατήριο δεν είναι ένας απλός σύνδεσμος, αφού το ίδιο μπορεί να απορροφήσει ή και να δώσει ενέργεια.

dmargaris@gmail.com