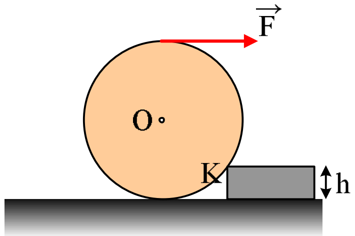
Υπερπήδηση εμποδίου.

Γύρω από ένα κύλινδρο ακτίνας R=0,5m και μάζας M=100kg τυλίγεται ένα αβαρές νήμα και στο άκρο του ασκούμε οριζόντια δύναμη F=400N με σκοπό την υπερπήδηση ενός σκαλοπατιού ύψος h=0,2m.

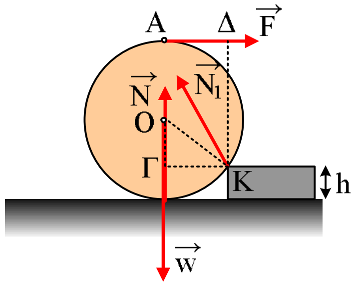


i) Θα υπερπηδήσει ο κύλινδρος το σκαλοπάτι;
ii) Σε μια στιγμή αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή F_1=800N. Πόση γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει ο κύλινδρος;
iii) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου όταν έχει ανυψωθεί κατά 0,1m από το έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεών του I= ½ MR^2 και g=10m/s^2, ενώ δεν παρατηρείται ολίσθηση στο σημείο επαφής του κυλίνδρου με το σκαλοπάτι, σημείο Κ.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο. Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος «αρχίζει» να υπερπηδά το σκαλοπάτι με την επίδραση κατάλληλης τιμής της δύναμης F. Τότε θα χάσει την επαφή με το έδαφος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N θα μηδενιστεί. Αλλά τότε, παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Κ (γύρω από το οποίο θα περιστραφεί ο κύλινδρος) θα πρέπει:



$\tau_F > \tau_w$ ή F·(ΚΔ) > w·(ΓΚ) (1)

Αλλά (ΚΔ)=(ΑΓ) ενώ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΚ ισχύει:

$$(\text{ΟΓ})^2 + (\text{ΓΚ})^2 = (\text{ΟΚ})^2 \rightarrow$$

$$(\text{ΓΚ}) = \sqrt{0,5^2 - 0,3^2}\,m = 0,4m$$

και από την (1) παίρνουμε:

$$F > \frac{w\cdot(\text{ΓΚ})}{(A\Gamma)} \quad ή \quad F > \frac{1000N\cdot 0,4m}{0,8m} \quad ή \quad F > 500N$$

Συνεπώς με τιμή της δύναμης 400N, δεν μπορεί ο κύλινδρος να υπερπηδήσει το εμπόδιο.

ii) Για την τιμή F=800N, προφανώς ο κύλινδρος υπερπηδά το σκαλοπάτι, στρεφόμενος γύρω από το σημείο Κ. Παίρνοντας το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

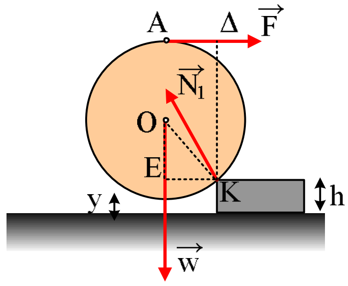
$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$F\cdot(\mathrm{A\Gamma}) - Mg\cdot(\Gamma \mathrm{K}) = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά από το θεώρημα Steiner έχουμε $I_{\kappa}=I_{cm}+MR^2 = 3/2\ MR^2$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2[F\cdot(\mathrm{A\Gamma}) - Mg\cdot(\Gamma\mathrm{K})]}{3MR^2} = \frac{2(800\cdot 0{,}8 - 1000\cdot 0{,}4)}{3\cdot 100\cdot 0{,}5^2} r/s^2 = 6{,}4 r/s^2$$

iii) Στο σχήμα φαίνεται η νέα κατάσταση όπου: (ΟΕ)=R-(h-y)=0,4m ενώ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΟΚ ισχύει:



$$(\mathrm{OE})^2 + (\mathrm{EK})^2 = (\mathrm{OK})^2 \rightarrow$$

$$(E\mathrm{K}) = \sqrt{0{,}5^2 - 0{,}4^2}\, m = 0{,}3m$$

Παίρνοντας ξανά το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$F\cdot(\Delta\mathrm{K}) - Mg\cdot(\mathrm{EK}) = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{2[F\cdot(\mathrm{AE}) - Mg\cdot(E\mathrm{K})]}{3MR^2} = \frac{2(800\cdot 0{,}9 - 1000\cdot 0{,}3)}{3\cdot 100\cdot 0{,}5^2} r/s^2 = 11{,}2 r/s^2$$

Παρατηρούμε ότι η γωνιακή επιτάχυνση αυξάνεται καθώς αρχίζει η υπερπήδηση του σκαλοπατιού, πράγμα αναμενόμενο, αφού από τη μια μεριά αυξάνεται ο μοχλοβραχίονας της δύναμης F, ενώ ταυτόχρονα μειώνεται ο αντίστοιχος του βάρους.

dmargaris@sch.gr