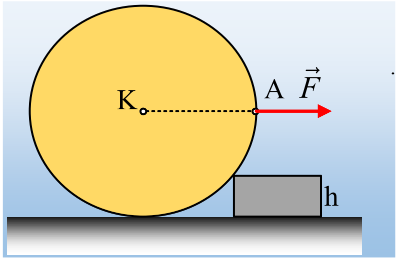
Ο κύλινδρος και το σκαλοπάτι.



Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος, βάρους w και ακτίνας R, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με σκαλοπάτι ύψους h=0,4R. Σε μια στιγμή στο άκρο Α μιας οριζόντιας ακτίνας του ασκούμε, μέσω νήματος, μια οριζόντια δύναμη F, μέτρου F=w, όπως στο σχήμα.

Α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

i) Ο κύλινδρος θα υπερπηδήσει το σκαλοπάτι, αν αναπτύσσεται τριβή με το σκαλοπάτι, με αποτέλεσμα να μην ολισθαίνει.

ii) Αν το σκαλοπάτι είναι λείο, ο κύλινδρος θα ισορροπήσει.

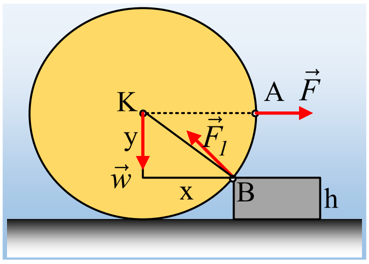
iii) Ο κύλινδρος θα ισορροπήσει, μόνο αν εμφανιστεί τριβή μεταξύ κυλίνδρου και σκαλοπατιού.

Β) Να υπολογίσετε, σε συνάρτηση με το βάρος w του κυλίνδρου:

i) Την αντίδραση από το οριζόντιο επίπεδο, η οποία ασκείται στον κύλινδρο.

ii) Την δύναμη που ασκεί στον κύλινδρο το σκαλοπάτι.

Απάντηση:

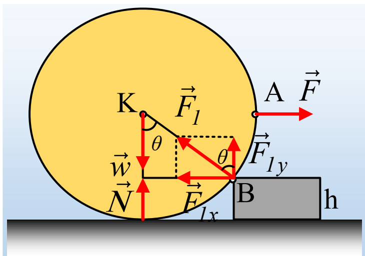


i) Αν δεχτούμε ότι ο κύλινδρος αρχίζει να υπερπηδά το σκαλοπάτι, τότε αρχίζει να στρέφεται γύρω από το σημείο Β, χάνοντας την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, αλλά τότε δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα και θα ισχύει:

$$\tau_{F,B} \geq \tau_{w,B} \rightarrow F \cdot y \geq w \cdot x \rightarrow y \geq x \quad (1)$$

Όπου y=R-h=0,6R και $x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - (0,6R)^2} = \sqrt{0,64R^2} = 0,8R$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι x>y και η (1) δεν ισχύει. Άρα ο κύλινδρος δεν μπορεί να χάσει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο και δεν θα υπερπηδήσει το σκαλοπάτι.



ii) Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σκαλοπατιού και κυλίνδρου στο σημείο Β, τότε η δύναμη F_1 από το σκαλοπάτι, θα είναι κάθετη στην επιφάνεια, αλλά τότε δεν θα έχει την κατεύθυνση που δείχνει το παραπάνω σχήμα, αλλά θα κατευθύνεται στο κέντρο Κ, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε όλες οι δυνάμεις συντρέχουν στο κέντρο Κ, ως προς το οποίο η συνολική ροπή τους είναι μηδενική και ο κύλινδρος δεν θα αρχίσει να στρέφεται, ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο Κ. Μήπως μεταφέρεται;

Για να αρχίσει να ανυψώνεται θα πρέπει $F_{1y} > w \rightarrow F_1 \cdot$συνθ $> w$ και $F > F_1 \cdot$ημθ, από όπου:

$F_1 \cdot$συνθ $> F_1 \cdot$ημθ $\rightarrow$ y>x, πράγμα που δεν ισχύει.

Βλέπουμε δηλαδή ότι ούτε μεταφορική κίνηση μπορεί να κάνει ο κύλινδρος για να υπερπηδήσει το σκαλοπάτι, συνεπώς ισορροπεί.

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα δεν χρειάζεται να εμφανιστεί καμιά τριβή για να εξασφαλιστεί η ισορροπία. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

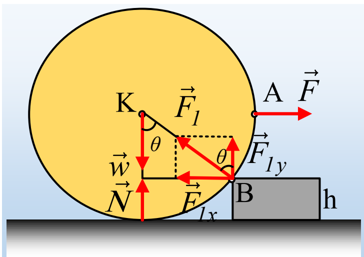
Εξάλλου αν εμφανιζόταν δύναμη τριβής, που αναγκαστικά είναι εφαπτομενική στον κύκλο, τότε η συνολική ροπή των δυνάμεων, ως προς το Κ θα ήταν διάφορη του μηδενός και θα είχαμε περιστροφή του κυλίνδρου και όχι ισορροπία!"

Β) Με βάση το παραπάνω σχήμα και στηριζόμενοι στην ισορροπία του κυλίνδρου θα έχουμε:

i) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο Β, θα είναι μηδενική, οπότε:

$$\Sigma\tau_B = 0 \rightarrow \tau_F + \tau_w + \tau_N + \tau_{F_1} = 0 \rightarrow$$
$$-F \cdot y + w \cdot x - N \cdot x + 0 = 0 \rightarrow$$
$$-w \cdot 0{,}6R + w \cdot 0{,}8R - 0{,}8N = 0 \rightarrow$$
$$N = 0{,}25w$$

ii) Αναλύουμε την δύναμη F_1 από το σκαλοπάτι σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, όπως στο διπλανό σχήμα. Από την ισορροπία του κυλίνδρου παίρνουμε:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow F - F_{1x} = 0 \rightarrow F_1 \cdot \eta\mu\theta = F \rightarrow \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{1y} + N - w = 0 \end{cases}$$

$$F_1 = \frac{F}{\eta\mu\theta} = \frac{w}{x/R} = \frac{w}{0{,}8} = 1{,}25w$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης