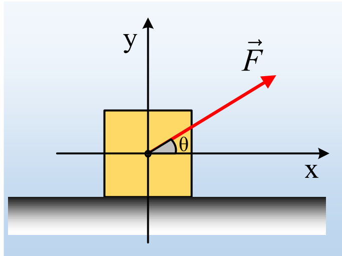
Η απογείωση με την άσκηση μεταβλητής δύναμης



Ένα μικρό σώμα μάζας m=0,8kg, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκείται στο σώμα μια πλάγια μεταβλητή δύναμη F, η οποία σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο, μια σταθερή γωνία θ, όπου ημθ=0,8 και συνθ=0,6. Αν το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την σχέση F=5t (S.I.), ζητούνται:

i) Να αναλύσετε την δύναμη F σε δύο συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη και να υπολογίσετε τα μέτρα τους, τη χρονική στιγμή t_1=1s.

ii) Η δύναμη που το επίπεδο ασκεί στο σώμα τη στιγμή t_1.

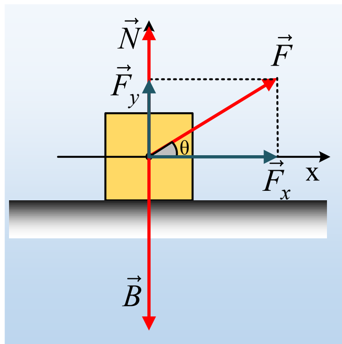
iii) Η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή t_1;

iv) Η χρονική στιγμή t_2 που το σώμα χάνει την επαφή, με το οριζόντιο επίπεδο. Πόση είναι η επιτάχυνση του σώματος την στιγμή αυτή;

v) Με ποια ταχύτητα το σώμα εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο;

Δίνεται $g=10m/s^2$

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, καθώς και οι συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$, σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, της δύναμης $\vec{F}$. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 5t\cdot 0{,}6 = 3t \quad (S.I.)$$

$$\eta\mu\theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F\cdot\eta\mu\theta = 5t\cdot 0{,}8 = 4t \quad (S.I.)$$

Οπότε την χρονική στιγμή t_1 τα μέτρα των συνιστωσών είναι:

$$F_x=3t=3\cdot 1N=3N \quad \text{και} \quad F_y=4t=4\cdot 1N=4N$$

ii) Το βάρος του σώματος έχει μέτρο:

$$B=mg = 0{,}8\cdot 10\ N= 8N$$

Αλλά τότε στον κατακόρυφο άξονα $B>F_y$, οπότε το επίπεδο ασκεί στο σώμα μια κατακόρυφη δύναμη στήριξης (την κάθετη δύναμη του επιπέδου) ώστε το σώμα να ισορροπεί:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+F_y-B=0 \quad (1)$$

$$N=B-F_y=8N-4N=4N$$

iii) Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην οριζόντια διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = ma_1 \to F_x = ma_1 \to a_1 = \frac{F_x}{m} \quad (2) \to$$

$$a_1 = \frac{F_x}{m} = \frac{3N}{0,8kg} = 3,75m/s^2.$$

iv) Τη στιγμή t_2 που το σώμα θα χάσει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, θα μηδενιστεί η δύναμη που δέχεται από το επίπεδο, οπότε επιστρέφοντας στην εξίσωση (1) θα έχουμε:

$$N + F_y - B = 0 \to 0 + 4t_2 - mg = 0 \to t_2 = \frac{mg}{4} = \frac{0,8 \cdot 10}{4}s = 2s$$

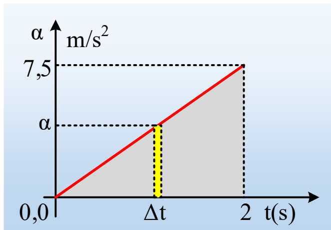
Αλλά τότε από την (2) παίρνουμε για την επιτάχυνση στην οριζόντια διεύθυνση τη στιγμή t_2:

$$\Sigma F_x = ma_2 \to F_{x,2} = ma_2 \to a_2 = \frac{3t_2}{m} = \frac{3 \cdot 2}{0,8} m/s^2 = 7,5m/s^2.$$

v) Με βάση τα παραπάνω το σώμα, μέχρι τη στιγμή της απογείωσης t_2 κινείται με μεταβλητή επιτάχυνση. Η τιμή της, κάθε στιγμή, μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση (1):

$$a = \frac{F_x}{m} = \frac{3t}{0,8} = \frac{15}{4}t \quad (S.I.)$$

Κάνοντας τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή t_2, παίρνουμε το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Αν εστιάσουμε σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, στο οποίο μπορούμε να δεχτούμε ότι έχουμε μια σταθερή επιτάχυνση, το εμβαδόν του κίτρινου ορθογωνίου είναι ίσο με α·Δt



Αλλά από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε ότι:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \to \Delta\upsilon = a \cdot \Delta t$$

Δηλαδή το εμβαδόν του κίτρινου ορθογωνίου είναι αριθμητικά ίσο με την μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα Δt. Αλλά τότε χωρίζοντας το χρόνο από 0-t_2 σε μικρά τέτοια ορθογώνια και προσθέτοντας τα εμβαδά τους, θα πάρουμε το εμβαδόν του γκρι τριγώνου, το οποίο θα είναι αριθμητικά ίσο με την συνολική μεταβολή της ταχύτητας:

$$\Delta\upsilon = \frac{1}{2}t_2 a_2 = \frac{1}{2}2 \cdot 7,5m/s = 7,5m/s \to$$
$$\upsilon_2 - \upsilon_o = 7,5m/s \to \upsilon_2 - 0 = 7,5m/s \to$$
$$\upsilon_2 = 7,5m/s$$

dmargaris@gmail.com