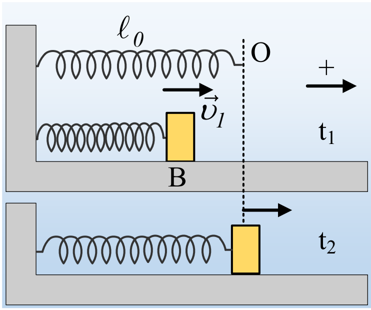
Η φθίνουσα σε αντιπαράθεση με την εξαναγκασμένη



Το σώμα του σχήματος, αμελητέων διαστάσεων, ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου και τη στιγμή t_1 περνά από την θέση Β, με ταχύτητα υ_1 με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Στο σώμα ασκείται δύναμη απόσβεσης $F_{απ}=-b\upsilon$ και η κίνηση μπορεί να είναι φθίνουσα ή και εξαναγκασμένη, αφού μπορεί να ασκείται στο σώμα και εξωτερική αρμονική δύναμη.

i) Η θέση ισορροπίας, από την οποία μετράμε και την απομάκρυνση x, είναι η θέση Ο, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του:

Α) Μόνο για την περίπτωση της φθίνουσας ταλάντωσης.

Β) Μόνο για την εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Γ) Και στις δύο ταλαντώσεις.

Δ) Σε καμιά από τις δύο αυτές ταλαντώσεις.

ii) Αν η ταλάντωση είναι **φθίνουσα**:

Α) Η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Β, όπου η απομάκρυνση είναι x_1, έχει μέτρο:

α) $\alpha_1 < k|x_1|/m$, β) $\alpha_1 = k|x_1|/m$, γ) $\alpha_1 > k|x_1|/m$.

Β) Η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Ο είναι μηδενική ή όχι;

Γ) Το σώμα θα ξαναπεράσει από την θέση Β κινούμενο προς τα δεξιά, μια επόμενη χρονική στιγμή t_3, έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_3 και επιτάχυνση μέτρου α_3.

$Γ_1$) Αν η ενέργεια ταλάντωσης την στιγμή t_1 είναι ίση με E_1, τότε:

α) $E_3 < E_1$, β) $E_3 = E_1$, γ) $E_3 > E_1$.

$Γ_2$) Για τα μέτρα των επιταχύνσεων α_1 και α_3 ισχύει:

α) $\alpha_3 < \alpha_1$, β) $\alpha_3 = \alpha_1$, γ) $\alpha_3 > \alpha_1$.

iii) Αν η ταλάντωση του σώματος είναι εξαναγκασμένη και η απομάκρυνση του σώματος ικανοποιεί την εξίσωση $x=A\cdot ημ(\omega_\delta t)$:

Α) Η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Ο είναι μηδενική ή όχι;

Β) Αν το σώμα τη στιγμή t_1 έχει επιτάχυνση α_1 και ενέργεια ταλάντωσης E_1, τότε όταν το σώμα θα ξαναπεράσει από την θέση Β κινούμενο προς τα δεξιά, μια επόμενη χρονική στιγμή t_3, έχοντας ενέργεια E_3 και επιτάχυνση μέτρου α_3, θα ισχύουν:

$Β_1$) Για τις ενέργειες ταλάντωσης:

α) $E_3 < E_1$, β) $E_3 = E_1$, γ) $E_3 > E_1$.

$Β_2$) Για τα μέτρα των επιταχύνσεων α_1 και α_3 ισχύει:

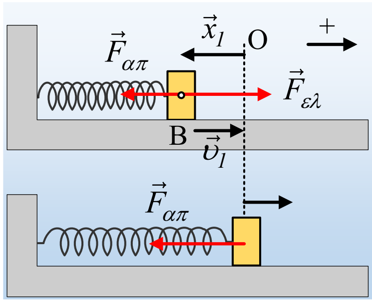
α) $\alpha_3 < \alpha_1$, β) $\alpha_3 = \alpha_1$, γ) $\alpha_3 > \alpha_1$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Και στις δύο ταλαντώσεις θέση ισορροπίας είναι αυτή που αν αφεθεί το σώμα θα ισορροπήσει, θα παραμείνει ακίνητο. Αυτή η θέση είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου Ο και γύρω από αυτήν την θέση το σώμα ταλαντώνεται και ως προς την θέση αυτή υπολογίζουμε την απομάκρυνση του σώματος.
Σωστό το Γ)

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα (για να μην επιβαρυνθούν τα σχήματα, δεν σχεδιάστηκαν βάρος και κάθετη αντίδραση, που δεν επηρεάζουν την κίνηση.



Α) Με βάση τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση Β, παίρνουμε για την επιτάχυνση του σώματος:

$$\Sigma F = m\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{|F_{ελ}| - |F_{απ}|}{m} = \frac{k|x_1| - bυ_1}{m} < \frac{k|x_1|}{m} \quad (1)$$

Σωστό το α).

Β) Στη θέση ισορροπίας Ο, στο σώμα ασκείται η δύναμη απόσβεσης με τιμή $F_{απ}$=-bυ, συνεπώς το σώμα επιβραδύνεται έχοντας επιτάχυνση αντίθετης φοράς από την ταχύτητα.

Γ) Η ενέργεια ταλάντωσης είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, Έτσι τη στιγμή t_1 έχει ενέργεια:

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (2)$$

Από την στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή t_3 στο σώμα ασκείται η δύναμη απόσβεσης, μέσω του έργου της οποίας η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_3 να έχει μικρότερη ενέργεια:

$$E_3 = \frac{1}{2}mυ_3^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (3)$$

$Γ_1$) Με βάση τα παραπάνω στην φθίνουσα ταλάντωση η ενέργεια μειώνεται και σωστό είναι το α).

$Γ_2$) Με βάση τις εξισώσεις (2) και (3) προκύπτει ότι αφού $E_3 < E_1$:

$$\frac{1}{2}mυ_3^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 < \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow υ_3 < υ_1$$

Όταν δηλαδή μιλάμε για μείωση της ενέργειας μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_3, αυτή οφείλεται σε μείωση του μέτρου της ταχύτητας. Αυτό όμως σημαίνει ότι μειώνεται και η ασκούμενη δύναμη απόσβεσης, με αποτέλεσμα η επιτάχυνση $α_3$ να έχει μέτρο:

$$\Sigma F_3 = m\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 = \frac{|F_{ελ}| - |F_{απ}|}{m} = \frac{k|x_1| - bυ_3}{m}$$

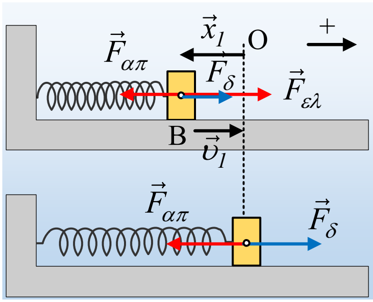
Αλλά αφού:

$$\upsilon_3 < \upsilon_1 \rightarrow -b\upsilon_3 > -b\upsilon_1 \rightarrow \frac{k|x_1| - b\upsilon_3}{m} > \frac{k|x_1| - b\upsilon_1}{m} \xrightarrow{(1)} a_3 > a_1$$

iii) Στην περίπτωση τώρα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, με σταθερό πλάτος Α, αφού η εξίσωση της απομάκρυνσης ικανοποιεί την εξίσωση $x=A\cdot\eta\mu(\omega_\delta t)$, θα ισχύουν για ταχύτητα και επιτάχυνση, οι εξισώσεις:

$$\upsilon = \omega_\delta A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega_\delta t) \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha = -\omega_\delta^2 A \cdot \eta\mu(\omega_\delta t) = -\omega_\delta^2 \cdot x$$

Πράγμα που σημαίνει ότι κάθε φορά που το σώμα περνάει από μια ορισμένη θέση έχει πάντα την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην ΑΑΤ.



Εξάλλου στο σώμα ασκείται επιπλέον (πέρα από τις δυνάμεις που ασκούνται στην φθίνουσα) και η δύναμη από τον διεγέρτη, όπως στο σχήμα.

Α) στη θέση ισορροπίας Ο, αφού x=0 και α=0 αφού:

$$\alpha = -\omega_\delta^2 A \cdot \eta\mu(\omega_\delta t) = -\omega_\delta^2 \cdot x = 0$$

B_1) Το σώμα περνά κάθε φορά, από τη θέση Β, με την ίδια ταχύτητα.

(αν θέλουμε απόδειξη με απαλοιφή των τριγωνομετρικών αριθμών από τις εξισώσεις x και υ, παίρνουμε την γνωστή; μας εξίσωση $\upsilon = \pm\omega_\delta\sqrt{A^2 - x^2}$).

Αλλά τότε για την ενέργεια ταλάντωσης στη θέση Β, ανεξάρτητα αν μιλάμε για τις στιγμές t_1 και t_3 θα έχουμε:

$$E_1 = E_3 = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Σωστό το β).

B_2) Και εδώ σωστή απάντηση είναι η β) αφού η επιτάχυνση εξαρτάται μόνο από την απομάκρυνση x, οπότε:

$$\alpha_1 = -\omega_\delta^2 A \cdot \eta\mu(\omega_\delta t) = -\omega_\delta^2 \cdot x_1 = \alpha_3$$

dmargaris@gmail.com