

Το τρίγωνο του Πασκάλ

Στην 3^η γυμνασίου όταν τελειώνω στην άλγεβρα την παράγραφο των ταυτοτήτων (παρ. 1.5) ζητώ από τους μαθητές να προσπαθήσουν να κάνουν τα 3 πρώτα ερωτήματα από την εργασία που έχει το βιβλίο στο τέλος των ασκήσεων (σελ. 51).

*Το τρίγωνο του Πασκάλ
και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του $a + b$*

1	$(a+b)^0 =$	1
1 1	$(a+b)^1 =$	$1a + 1b$
1 2 1	$(a+b)^2 =$	$1a^2 + 2ab + 1b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3 =$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4 =$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
1 □ □ □ □ 1	$(a+b)^5 =$ + + + + +
1 □ □ □ □ □ 1	$(a+b)^6 =$

Παρατηρήστε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος $a + b$.

1. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως τρίγωνο του Πασκάλ. Το τρίγωνο αυτό πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1. Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;



2. Συνεχίστε την κατασκευή του τριγώνου και βρείτε τα αναπτύγματα $(a + b)^5$ και $(a + b)^6$, αφού πρώτα ανακαλύψετε με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του a και του b σε κάθε ανάπτυγμα.

3. Να βρείτε και το ανάπτυγμα του $(a - b)^6$, αν γνωρίζετε ότι και τα αναπτύγματα των δυνάμεων της διαφοράς $a - b$ προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μόνο που θέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, αρχίζοντας από +. π.χ. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

4. Μπορείτε να βρείτε ποιες άλλες ιδιότητες κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου Πασκάλ;

Αφού τους αφήσω να πειραματιστούν για 10 λεπτά, προτού ρωτήσω για τα ευρήματά τους, τους παρουσιάζω το παρακάτω βίντεο.

<https://www.youtube.com/watch?v=YUqHdxxdbyM>

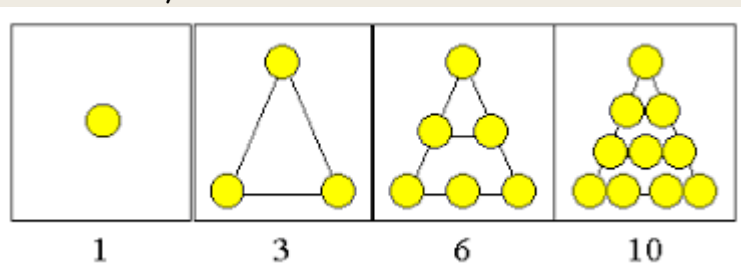
Από τα πρώτα κιόλας δευτερόλεπτα του βίντεο, ακόμη και οι μαθητές που δεν μπόρεσαν να βρουν με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς, τώρα το έχουν ανακαλύψει (1^ο ερώτημα).

Στο σημείο αυτό (το πολύ έως και το 57^ο δευτερόλεπτο του βίντεο) το σταματώ και ζητώ απ' όλους να συμπληρώσουν τις ταυτότητες του 2^{ου} ερωτήματος αφού προηγουμένως έχουμε ανακαλύψει με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του α και του β σε κάθε ανάπτυγμα.

Κατόπιν αφού έχουμε απαντήσει το 2^ο ερώτημα ζητώ από κάποιον μαθητή να μου βρει το ανάπτυγμα του $(\alpha-\beta)^6$; (3^ο ερώτημα).

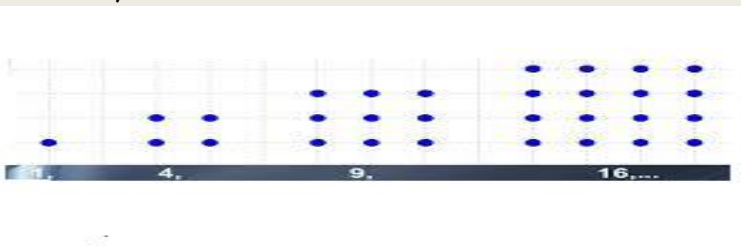
Τέλος συνεχίζουμε την προβολή και ανακαλύπτουμε όλοι μαζί κάποιες από τις ιδιότητες που κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου του Πασκάλ (όπως π.χ. το άθροισμα κάθε γραμμής είναι δύναμη του 2, ποιοι είναι οι τριγωνικοί αριθμοί:

1,
3=1+2,
6=1+2+3,
10=1+2+3+4,...



ποιοι είναι οι τετράγωνοι αριθμοί:

1,
4=1+3,
9=3+6,
16=6+10,...



και όποιες άλλες κρίνουμε εμείς σκόπιμο να πούμε). (4^ο ερώτημα)

Μουστάκας Χρήστος