

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ Α.1.2.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ/...../.....

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$12 + 7 = 19$ Οι αριθμοί 12 και 7 ονομάζονται ενώ το 19 ονομάζεται

- $3 + 5 = \dots\dots\dots$, $5 + 3 = \dots\dots\dots$

γενικά $\alpha + \beta = \dots\dots\dots$ (ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

- $2 + 0 = \dots\dots\dots$, $0 + 3 = \dots\dots\dots$, $2015 + 0 = \dots\dots\dots$

γενικά $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \dots\dots\dots$

- $(2 + 6) + 7 = \dots\dots\dots$, $2 + (6 + 7) = \dots\dots\dots$

γενικά $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$13 - 5 = 8$ γιατί $5 + 8 = 13$ Το 13 λέγεται , το 5 λέγεται και το 8 λέγεται

- $32 - 8 = \dots\dots\dots$ γιατί

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$6 \cdot 8 = 48$ Οι 6, 8 λέγονται ενώ το 48 ονομάζεται

- $8 \cdot 1 = \dots\dots\dots$, $1 \cdot 7 = \dots\dots\dots$, $1821 \cdot 1 = \dots\dots\dots$

γενικά $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \dots\dots\dots$

- $4 \cdot 5 = \dots\dots\dots$, $5 \cdot 4 = \dots\dots\dots$

γενικά $\alpha \cdot \beta = \dots\dots\dots$ (ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

- $(2 \cdot 6) \cdot 3 = \dots\dots\dots$, $2 \cdot (6 \cdot 3) = \dots\dots\dots$

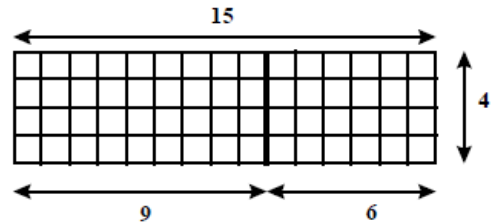
γενικά $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Α) ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

- $4 \cdot (9 + 6) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = \dots + \dots = \dots$
 - $5 \cdot (1 + 3) = \dots = \dots + \dots = \dots$
 - $9 \cdot (4 + 2) = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots$
- Αλλά και αντίστροφα :



- $4 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 4 \cdot (9 + 6) = \dots = \dots$
- $4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = \dots \cdot (\dots + \dots) = \dots = \dots$
- $100 \cdot 8 + 100 \cdot 2 = \dots \cdot (\dots + \dots) = \dots = \dots$

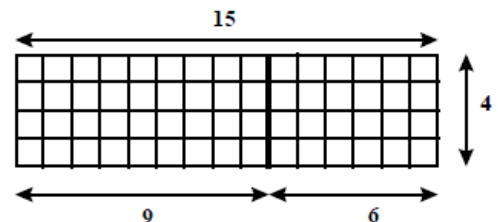
Η ιδιότητα αυτή χρησιμεύει και ως εξής

- $34 \cdot 11 = 34 \cdot (10 + 1) = 34 \cdot 10 + 34 \cdot 1 = \dots + \dots = \dots$
- $27 \cdot 101 = \dots \cdot (\dots + \dots) = \dots + \dots = \dots$
-

Β) ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

- $4 \cdot (15 - 6) = 4 \cdot 15 - 4 \cdot 6 = \dots - \dots = \dots$
 - $5 \cdot (9 - 2) = \dots - \dots = \dots = \dots$
 - $9 \cdot (4 - 1) = \dots - \dots = \dots - \dots = \dots$
- Αλλά και αντίστροφα :



- $2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 2 \cdot (6 - 5) = \dots = \dots$
- $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = \dots \cdot (\dots - \dots) = \dots = \dots$
- $100 \cdot 8 - 100 \cdot 2 = \dots \cdot (\dots - \dots) = \dots = \dots$

Η ιδιότητα αυτή χρησιμεύει και ως εξής

- $34 \cdot 99 = 34 \cdot (100 - 1) = 34 \cdot 100 - 34 \cdot 1 = \dots + \dots = \dots$
- $12 \cdot 998 = \dots \cdot (\dots - \dots) = \dots - \dots = \dots + \dots = \dots$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕ 10, 100, 1000

- $32 \cdot 10 = \dots$
- $18 \cdot 100 = \dots$
- $3 \cdot 10000 = \dots$
- $125 \cdot 1000000 = \dots$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό με 10, 100, 1000....
Γράφουμε τον αριθμό και προσθέτουμε στο τέλος του αριθμού.....
.....

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ Α.1.3.

Δυνάμεις φυσικών αριθμών

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ/...../.....

(1) Να γράψετε πιο γρήγορα τις παρακάτω παραστάσεις

$$\Gamma = 4 \cdot 4 \cdot 4 \quad \Delta = 3 \cdot 3 \quad E = x \cdot x \cdot x$$

$$K = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$\Gamma = 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$\Delta = 3 \cdot 3 =$$

$$E = x \cdot x \cdot x =$$

$$K = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha =$$

(2) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

$$A = 2^3$$

$$B = 3^3$$

$$\Gamma = 1^8$$

$$\Delta = 4^1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$A =$$

$$B =$$

$$\Gamma =$$

$$\Delta =$$

(3) Να βρείτε το τετράγωνο του 5 και τον κύβο του 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(4) Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα σε μορφή δύναμης

(α) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

(β) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

(γ) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n = \alpha^n$$

Δύναμη του α στην n ή Νιοστή δύναμη του α
 $\alpha^n : \alpha \rightarrow$ βάση, $n \rightarrow$ εκθέτης

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n$$

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$1^n = 1$$

α^2 : το τετράγωνο του α
 α^3 : ο κύβος του α

Γράφω την βάση ,
 εδώ το 5 , και βάζω
 εκθέτη το πόσες
 φορές εμφανίζεται η
 βάση

(5) Να γράψετε τις δυνάμεις του 10 : 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$10^2 = 10 \cdot 10 = \underline{100}$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 =$$

$$10^4 =$$

$$10^5 =$$

Γράφω το 1 και βάζω
τόσα μηδενικά όσα ο
εκθέτης

(6) Να γράψετε τον αριθμό 53.782 και τον 23.265 σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση δυνάμεων του 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$53.782 = 5 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 =$$

$$23265 =$$

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα των πράξεων**) είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογισμός **δυνάμεων**.
2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών** και **διαιρέσεων**
3. Εκτέλεση **προσθέσεων** και **αφαιρέσεων**.

(7) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (6-4)^3 + 4 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(Πρώτα κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις)

(Έπειτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις)

(κάνουμε πολλαπλασιασμούς / διαιρέσεις)

(Και τέλος τις προσθέσεις και αφαιρέσεις)

(8) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = (4 \cdot 3 - 2)^2 - 3 \cdot 6^2 + 8^2 : 2$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ Α.1.4.
ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ/...../.....

Δραστηριότητα 1

Ο Γυμναστής του σχολείου θέλει να χωρίσει τους 20 μαθητές ενός τμήματος σε 3άδες. Πόσες τριάδες θα γίνουν; Πόσους μαθητές θα έχει η τελευταία σειρά;

Τριάδες : Μαθητές τελευταίας σειράς :

$$20 = 3 \cdot \dots + \dots$$

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα

Μαθητές	Τους χωρίζουμε σε	Πλήθος σειρών	Πόσοι στην τελευταία σειρά	Πράξη
20	3άδες	6	2	$20=3 \cdot 6+2$
32	5άδες			
	6άδες	7	4	
40	4άδες			
28		6		
168	5άδες			
Δ	δ	π	υ	$\Delta=\delta \cdot \pi+\upsilon$

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ , έτσι ώστε να ισχύει: $\Delta=\delta \cdot \pi+\upsilon$
- Ο αριθμός Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός π ονομάζεται **πηλίκιο** και το υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.
- **Τι παρατηρούμε για το υπόλοιπο;**
- Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.
- Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση**:

Δραστηριότητα 2

Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν "Ευκλείδεια διαίρεση";

(α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$ (β) $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$ (γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$

Δραστηριότητα 3

Γράψτε την Ευκλείδεια διαίρεση του 172 με το 39

Δραστηριότητα 4

Έχουμε εκτυπώσει 87 φωτογραφίες και θέλουμε να τις τοποθετήσουμε σε ένα φωτογραφικό άλμπουμ που χωράει 6 φωτογραφίες στην κάθε σελίδα

α) Πόσες σελίδες του άλμπουμ θα χρησιμοποιήσουμε;.....

β) Η τελευταία σελίδα φωτογραφιών θα είναι γεμάτη;.....

Άν όχι πόσες φωτογραφίες θα έχει;.....

Δραστηριότητα 5

Έχουμε εκτυπώσει 237 φωτογραφίες και θέλουμε να τις τοποθετήσουμε σε ένα φωτογραφικό άλμπουμ

α) Αν οι φωτογραφίες χωράνε σε 52 σελίδες πόσες φωτογραφίες χωράει κάθε σελίδα;

β) Η τελευταία σελίδα φωτογραφιών θα είναι γεμάτη;.....

Άν όχι πόσες φωτογραφίες θα έχει;.....

Δραστηριότητα 6

A) Ποιος αριθμός όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει πηλίκο 13 και υπόλοιπο 3;

B) Ποιοι αριθμοί όταν διαιρούνται με το 9 δίνουν πηλίκο 6;

Δραστηριότητα 7

Αν σήμερα είναι Τετάρτη, τι μέρα θα είναι μετά από 239 ημέρες;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ Α.1.5.

Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ/...../.....

- (1) Να γραφούν τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 2 ,3, και 5 . Στην συνέχεια να βρεθούν τα κοινά τους πολλαπλάσια και το Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πολλαπλάσια του 2 :

Πολλαπλάσια του 3 :

Πολλαπλάσια του 5:

Άρα τα κοινά τους πολλαπλάσια είναι

Και επομένως ΕΚΠ(2,3, 5) =

Παρατηρούμε ότι το 5 διαιρεί όλα τα πολλαπλάσια του και όλα τα πολλαπλάσια του 5 διαιρούνται από το 5 .

Το ίδιο ισχύει για το 3 και για όλους γενικά τους φυσικούς αριθμούς

Το ΕΚΠ είναι το μικρότερο, μη μηδενικό από τα κοινά πολλαπλάσια

- (2) Το 1 διαιρεί το 5 ;.....

το 8 διαιρεί το 20;.....

το 2 διαιρεί το 20;.....

Το 12 διαιρείται από το 3;.....

Το 18 διαιρείται από το 5;

Το 20 είναι πολλαπλάσιο του 10;.....

Το 42 είναι πολλαπλάσιο του 5;.....

Το 3 είναι πολλαπλάσιο του 9.....

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του
- Κάθε φυσικός που διαιρείται από ένα άλλο είναι πολλαπλάσιό του

- (3) Ο αριθμός 3 διαιρεί το 12;.....αφού.....

Ο αριθμός 12 διαιρεί το 120;.....αφού.....

Ο αριθμός 3 διαιρεί τι ο 120;

Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλο , τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του

- (4) Βρες τους διαιρέτες των αριθμών 12 , 8

Στην συνέχεια να βρεθούν οι κοινοί διαιρέτες και ο Μέγιστος Κοινός διαιρέτης πολλαπλάσιό τους .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Διαιρέτες του 12 :

Διαιρέτες του 8 :

Οι κοινοί τους διαιρέτες είναι :

Και επομένως ΜΚΔ(12, 8) =

Ο ΜΚΔ είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες

(5) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 18, 23 και 45 είναι πρώτοι και ποιοί σύνθετοι

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Διαιρέτες του 18:

Άρα το 18 είναι

Διαιρέτες του 11:.....

Άρα το 181 είναι

Διαιρέτες του 45:

Άρα το 45 είναι

Ένας αριθμός λέγεται πρώτος αν διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα, αλλιώς λέγεται σύνθετος

(6) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 14 , 9 είναι πρώτοι μεταξύ τους

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι διαιρέτες του 14 είναι

Οι διαιρέτες του 9 είναι

Άρα Μ.Κ.Δ (14,9) = και επομένως οι 14, 9

Οι αριθμοί α,β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν $ΜΚΔ(α,β)=1$

(7) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 8 , 18 είναι πρώτοι μεταξύ τους

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι διαιρέτες του 18 είναι

Οι διαιρέτες του 8 είναι

Άρα Μ.Κ.Δ (18,8) = και επομένως οι 18, 8

(8) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διαιρούνται με →	2	3	5	9	10
Αριθμοί ↓					
312111					
3895					
36450					
4955					
2246					

- Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 9
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 3.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 όταν τελειώνει σε 0,2,4,6,8
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν τελειώνει σε 0 ή 5

(9) Συμπλήρωσε το κενό με κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός που θα σχηματισθεί να διαιρείται με το 9.

(α) 6...1 (β) 69...3 (γ) 601...

(10) Στη θέση να βάλεις ένα κατάλληλο ψηφίο ώστε:

- α) 0 5 6 να διαιρείται με το 3
 β) 0 3 4..... να διαιρείται με το 2 και με το 3
 γ) 0 4 9 να διαιρείται με το 3 και με το 5

(11) α αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

(α) 90 (β) 84 (γ) 120 (δ) 2.344

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

90	2	84	120	184
45	3			
15	3			
5	5			
1				

Άρα $78 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$, $84 =$, $120 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$, $184 =$

(12) Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 84 και 120 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς , εδώ το 84 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως: σχηματίζουμε το γινόμενο των **κοινών πρώτων παραγόντων** τους με εκθέτη καθενός **τον μικρότερο από τους εκθέτες του.**

Είναι

$84 =$

$120 =$

$\text{ΜΚΔ} (84,120) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

(13) Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών 12 και 8 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς, εδώ το 12 και το 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως: σχηματίζουμε το γινόμενο των κοινών και μη κοινών πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του

Είναι

12 =

8 =

ΕΚΠ (6,8) =

12

8

(14) Βρείτε το ΜΚΔ των αριθμών (Με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων) 10 ,30 ,60

10

30

60

10 =

ΜΚΔ (10,30,60) ==.....

30 =

εΚπ (10,30,60) ==.....

60 =

(15) Ένας κτηνοτρόφος έχει περίπου 120 πρόβατα . Ο γιος του μια μέρα τα μέτρησε τρία-τρία και βρήκε ακριβώς πόσες τριάδες ήταν, την δεύτερη μέρα τα μέτρησε πέντε-πέντε και ξαναχωρίστηκαν τα πρόβατα σε πεντάδες. Το ίδιο έγινε όταν τα μέτρησε επτά –επτά. Μπορείς να βρεις ακριβώς πόσα πρόβατα ήταν;