© μαθηματικός : Χριστόφορος Κατσίμπρας :τηλ:6973692006 - x11k10@yahoo.gr

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ- ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ

παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	**παράγωγοι** σύνθετων συναρτήσεων	**ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ** βασικών συναρτήσεων: συνάρτηση f(x)	**ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ F(x)**
$(c)'=0$	Με Y = f(x) & $(Y)'=(f(x))'$	f(x) =0	F(x) = c
$(x)'=1$	ΙΣΧΥΕΙ:	f(x) =1	F(x) = x + c
$(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}$	$(Y^{\rho})'=\rho\cdot Y^{\rho-1}\cdot(Y)'$	f(x) = x^{ρ}	F(x) = $\frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ +c
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ x>0	$(\sqrt{Y})'=\frac{1}{2\sqrt{Y}}\cdot(Y)'$ Y>0	f(x) = $\sqrt{x}$ x≥0	F(x)= $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ +c
$(e^x)'=e^x$	$(e^Y)'=e^Y\cdot(Y)'$	f(x) = e^x	F(x)= e^x +c
$(\ell nx)'=\frac{1}{x}$ x>0	$(\ell nY)'=\frac{1}{Y}\cdot(Y)'$	f(x) = $\frac{1}{x}$	F(x)= ℓnx +c χ>0
$(ημx)'=συνx$	$(ημY)'=συνY\cdot(Y)'$	f(x) = $ημx$	F(x)=- $συνx$ + c
$(συνx)'=-ημx$	$(συνY)'=-ημY\cdot(Y)'$	f(x) = $συνx$	F(x)= $ημx$ + c
(εφx)' = $\frac{1}{συν^2x}$ α.	(εφY)' = $\frac{1}{συν^2Y}\cdot(Y)'$ γ.	f(x) = $\frac{1}{συν^2x}$ α.	F(x)= εφx + c β.
(σφχ)' = $-\frac{1}{ημ^2x}$ β.	(σφY)' = $-\frac{1}{ημ^2Y}\cdot(Y)'$ δ.	f(x) = $-\frac{1}{ημ^2x}$ β.	F(x)= σφχ + c α.
$(Τοξημx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$(ΤοξημY)'=\frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}\cdot(Y)'$ *	f(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	F(x)= $Τοξημx$ +c
$(Τοξσυνx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$(ΤοξσυνY)'=-\frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}\cdot(Y)'$ *	f(x) = $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	F(x)= $Τοξσυνx$ +c
$(Τοξεφx)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(ΤοξεφY)'=\frac{1}{1+Y^2}\cdot(Y)'$	f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$	F(x)= $Τοξεφx$ +c
$(Τοξσφx)'=-\frac{1}{1+χ^2}$	$(ΤοξσφY)'=-\frac{1}{1+Y^2}\cdot(Y)'$	f(x) = $-\frac{1}{1+χ^2}$	F(x)= $Τοξσφx$ +c
α. χ≠κπ γ. συνY≠0 β. χ≠(2κ+1)π/2 δ. ημY≠0	* -1 < χ < 1 , -1 < Y < 1		

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ	ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ <u>Βγάζουμε τον συντελεστή έξω από την παρένθεση</u> **2.** $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ <u>Το σπάω σε δύο παραγώγους</u> **3.** $(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g(x)+f(x)\ g'(x)$ <u>Δύο φορές το γινόμενο με (+) και εναλλάξ παραγώγους.</u> **4.** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x)}{(g(x))^2}$ $g(x) \neq 0$ <u>Αριθμητή όπως και στο γινόμενο αλλά με (-) Και παρανομαστή το τετράγωνο του παρανομαστή.</u> **5.** $(f(g(x)))' = f'(g(x))\ g'(x)$ <u>Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης.</u> **6.** $(f^{-1})'(y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ *<u>Η παράγωγος της αντιστρόφου της f ισούται με το αντίστροφο</u>* $\left(\dfrac{1}{f'x_0}\right)$ *<u>της παραγώγου της f.</u>* $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$	Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε: **1.** $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$ *<u>Το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με τη διαφορά των τιμών, παράγουσας τέλους μείον παράγουσα αρχής</u>* **2.** $\int f(x)\ dx = F(x)+c,\ c \in \Re$ <u>Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ισούται με το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f .</u> **3.** $\int \lambda f(x)\ dx = \lambda \int f(x)\ dx,\ \lambda \in \Re^*$ <u>Βγάζουμε τον συντελεστή έξω από το ολοκλήρωμα.</u> **4.** $\int (f(x)+g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$ <u>Το σπάω σε δύο ολοκληρώματα.</u> **5•** $\int f'(x)\ dx = f(x)+c,\ c \in \Re$ <u>Παράγωγος και ολοκλήρωμα φεύγουν +c .</u> $\int (f'(x)\ g(x)+f(x)\ g'(x))dx = \int (f(x)\ g(x))'\ dx \Leftrightarrow$ **6•** $\int (f'(x) \cdot g(x)+f(x) \cdot g'(x))\ dx = f(x) \cdot g(x)+c$ <u>Ολοκλήρωμα αναπτύγματος παραγώγου γινομένου, ισούται με το γινόμενο + c.</u> **7•** $\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$ <u>Προκύπτει από την παραπάνω αν σπάσω το πρώτο μέλος σε δύο ολοκληρώματα και μετά λύσω ως προς το ένα.</u> **8.** $\int \dfrac{1}{f'(x_0)} dx = \int \left((f^{-1})'(y_0)\right) dx = (f^{-1})'(y_0) + c$ <u>Το ολοκλήρωμα της $1/f'(\chi_0)$ είναι (η παράγωγος της αντιστρόφου της f) + C</u>

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα *Δ*,

<<Αρχική συνάρτηση F>> ή **παράγουσα F της f στο *Δ***

θα λέμε κάθε συνάρτηση *F* , που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ*

και για την οποία ισχύει:

$\mathbf{F'(x) = f(x)}$ **, για κάθε** $x \in \Delta$ **.**

Μπορούμε να αποδείξουμε:

Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής,
σε ένα διάστημα *Δ*,
έχει και παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Αόριστο ολοκλήρωμα της f στο *Δ*

Ονομάζεται **το σύνολο,**

όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f ,

στο διάστημα *Δ*.

Συμβολίζεται με $\int f(x)dx$

και διαβάζεται “ολοκλήρωμα εφ του *x* ντε *x*”.

Δηλαδή, $\int f(x)dx = F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$,

όπου *F* μια παράγουσα της *f* στο *Δ*.

Για κάθε συνάρτηση *f*, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ*, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x)+c \, , \quad c \in \mathbb{R}$$

Ο αριθμός $f(\xi) = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta - \alpha}$

λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης *f* στο $[\alpha, \beta]$ και συμβολίζεται με $\bar{f}$.

Γεωμετρικά, η μέση τιμή $\bar{f}$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης

f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου

που έχει βάση το $[\alpha, \beta]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν

του χωρίου ***Ω*** που περικλείεται από τη γραφική παράσταση,

της *f*, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (σχήμα κάτω).